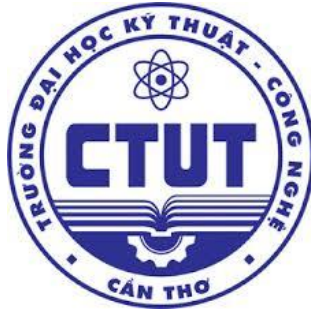


TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT - CÔNG NGHỆ CẦN THƠ
KHOA CÔNG NGHỆ SINH HÓA - THỰC PHẨM

-----❧-----



BÀI GIẢNG

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

(Lưu hành nội bộ)

Giảng viên biên soạn

Trần Thị Thùy Linh

Cần Thơ, năm 2023

MỤC LỤC

Chương 1: TĨNH HỌC	1
1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC	1
1.1.1. Các khái niệm cơ bản.	1
1.1.2. Các định luật tĩnh học.	3
1.1.3. Các hệ quả.	6
1.2. HỆ LỰC PHẪNG	8
1.2.1. Véc-tơ chính và mô men chính của hệ lực phẳng.	8
1.2.2. Thu gọn hệ lực phẳng.	9
1.2.4. Bài toán hệ lực phẳng với liên kết ma sát.	15
1.3. HỆ LỰC KHÔNG GIAN	18
1.3.1. Véc-tơ chính và véc-tơ mô men chính của hệ lực không gian.	18
1.3.2. Thu gọn hệ lực không gian.	20
Chương 2: ĐỘNG HỌC	24
2.1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM	24
2.1.1. Phương pháp véc tơ.	24
2.1.2. Phương pháp tọa độ Đề các.	25
2.1.3. Phương pháp tọa độ tự nhiên.	27
2.2. CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN	30
2.2.1. Chuyển động tịnh tiến.	30
2.2.2. Chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.	31
2.3. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN	34
2.3.1. Định nghĩa và mô hình.	34
2.3.2. Khảo sát chuyển động của hình phẳng.	35
2.4. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG	42
2.4.1. Tổng hợp chuyển động chất điểm.	42
2.4.2. Tổng hợp chuyển động vật rắn.	48
2.5. Động học cơ cấu	51
2.5.1. Một số khái niệm.	51
2.5.2. Cơ cấu khâu bản lề phẳng.	51
2.5.3. Các biến thể của cơ cấu bốn khâu.	52
Chương 3: ĐỘNG LỰC HỌC	56
3.1. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN	56
3.1.1. Các khái niệm.	56
3.1.2. Các định luật cơ bản của động lực học.	58
3.2. ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ	60
3.2.1. Các khái niệm.	60
3.2.2. Nguyên lí di chuyển khả dĩ.	69
3.2.3. Nguyên lí Đalămbe.	71
3.3. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ	74
3.3.1. Định lí động lượng và định lí chuyển động khối tâm của cơ hệ.	74
3.3.4. Định lí bảo toàn cơ năng.	83
3.4. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN	84

3.4.1.	Vật rắn chuyển động tịnh tiến.	84
3.4.3.	Vật rắn chuyển động song phẳng.	87
3.4.4.	Phương trình vi phân chuyển động cơ hệ và phương trình Lagrange loại II.	89
3.5.	ĐỘNG LỰC HỌC MÁY	90
3.5.1.	Các khái niệm.....	90
3.5.3.	Hiệu suất.....	94
Chương 4:	SỨC BỀN VẬT LIỆU	96
4.1.	MỞ ĐẦU	96
4.1.1.	Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học.	96
4.1.2.	Các khái niệm về thanh.	96
4.1.3.	Nội lực- Ứng suất.	96
4.1.4.	Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang.	98
4.1.5.	Quan hệ giữa ứng suất và các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang.	99
4.1.6.	Biến dạng.....	100
4.2.	KÉO NÉN ĐÚNG TÂM	101
4.2.1.	Định nghĩa.	101
4.2.2.	Biểu đồ lực dọc.	101
4.2.3.	Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.	102
4.2.5.	Đặc trưng cơ học của vật liệu.	105
4.2.6.	Điều kiện bền.	107
4.2.7.	Bài toán siêu tĩnh.....	108
4.3.	XOẮN THUẦN TÚY CỦA THANH THẲNG	109
4.3.1.	Định nghĩa.	109
4.3.2.	Mô men xoắn- Biểu đồ mô men xoắn.	109
4.3.3.	Thiết lập công thức ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn thuần túy.....	110
4.3.4.	Biến dạng của thanh tròn chịu xoắn.	113
4.3.5.	Điều kiện bền và điều kiện cứng.....	114
4.3.6.	Bài toán siêu tĩnh.....	116
4.4.	UỐN PHẪNG CỦA THANH THẲNG	117
4.4.1.	Các định nghĩa và phân loại.	117
4.4.2.	Nội lực và biểu đồ nội lực.	117
4.4.4.	Uốn ngang phẳng.....	125
4.4.6.	Đường đàn hồi.....	131
4.4.7.	Dầm siêu tĩnh.	137
4.5.	THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP	139
4.5.1.	Thanh chịu uốn xiên.	139
4.5.5.	Thanh chịu lực tổng quát.....	149
Chương 5:	CHỈ TIÊU BỀN	152
5.1.	CHỈ TIÊU BỀN TRONG TRƯỜNG HỢP TẢI TRỌNG TĨNH	152
5.2.	CHỈ TIÊU BỀN TRONG TRƯỜNG HỢP TẢI TRỌNG ĐỘNG	152
5.3.	ĐỘ CỨNG BỀ MẶT	154

LỜI NÓI ĐẦU

Bài giảng “***Cơ học ứng dụng***” nhằm trang bị kiến thức cơ học cơ sở cho các kỹ sư trong các lĩnh vực khác nhau của công nghiệp, đó là các nguyên lý hoạt động, các cơ sở tính toán về máy và các chi tiết máy. Bài giảng được viết dùng giảng dạy cho sinh viên ngành công nghệ thực phẩm nói riêng, ngoài ra nó còn làm tài liệu tham khảo cho các ngành kỹ thuật khác có liên quan. Bài giảng gồm 5 chương:

Chương 1: Tĩnh học

Chương 2: Động học

Chương 3: Động lực học

Chương 4: Sức bền vật liệu

Chương 5: Chỉ tiêu bền

Trong quá trình biên soạn không tránh khỏi sai sót về nội dung cũng như hình thức, rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Chân thành cảm ơn!

Chương 1 TĨNH HỌC

Tĩnh học vật rắn có nhiệm vụ nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của các lực. Trong phần tĩnh học sẽ giải quyết hai vấn đề cơ bản sau:

- Thu gọn hệ lực thực về dạng đơn giản: Biến đổi một hệ lực đã cho thành một hệ lực khác tương đương với nó nhưng đơn giản hơn. Trên cơ sở đó tìm các dạng tương đương đơn giản nhất của hệ lực gọi là các dạng chuẩn của hệ lực.
- Tìm điều kiện cân bằng của hệ lực: Thiết lập các điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn được cân bằng, chúng được gọi là các điều kiện cân bằng của hệ lực.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

1.1.1. Các khái niệm cơ bản.

1.1.1.1. Vật rắn tuyệt đối.

Là một tập hợp vô hạn các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ luôn luôn không đổi.

Vật rắn tuyệt đối là mô hình đơn giản nhất của vật thể khi biến dạng của nó có thể bỏ qua được do bé quá hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát. Vật rắn tuyệt đối gọi tắt là vật rắn.

1.1.1.2. Cân bằng.

Là trạng thái đứng yên của vật rắn so với một vật rắn khác được chọn làm chuẩn (hệ quy chiếu).

Trong tĩnh học hệ quy chiếu được chọn phải thỏa mãn định luật quán tính của Newton (hệ quy chiếu đứng yên tuyệt đối). Trong kỹ thuật hệ quy chiếu được chọn làm vật chuẩn thường là hệ trục tọa độ gắn với Trái Đất.

Cân bằng trong hệ quy chiếu quán tính gọi là cân bằng tuyệt đối.

1.1.1.3. Lực.

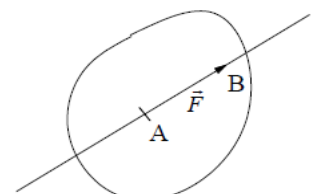
Là tương tác giữa các vật mà kết quả của nó là gây ra sự biến đổi trạng thái chuyển động cơ học (tức là sự thay đổi vị trí, bao gồm cả biến dạng) mà cân bằng chỉ là trường hợp riêng.

Qua thực nghiệm, tác dụng lực lên vật được xác định bởi ba yếu tố:

- a. Điểm đặt của lực là điểm mà tại đó vật nhận được tác dụng từ vật khác.
- b. Phương, chiều của lực là phương chiều chuyển động của chất điểm (Vật thể có kích thước vô cùng bé) từ trạng thái yên nghỉ dưới tác dụng cơ học.
- c. Cường độ (hay trị số) của lực là số đo độ mạnh yếu của tương tác cơ học. Đơn vị của lực là Newton, kí hiệu là N.

Ví dụ: Lực $\vec{F}$ biểu diễn bằng véc-tơ $\vec{AB}$ (hình 1-1).

Phương chiều của véc-tơ $\vec{AB}$ biểu diễn phương chiều của lực $\vec{F}$, độ dài của véc-tơ $\vec{AB}$ theo tỉ lệ đã chọn biểu diễn trị số của lực,



Hình 1-1

gốc véc-tơ biểu diễn điểm đặt của lực, giá của véc-tơ biểu diễn phương tác dụng của lực.

1.1.1.4. Các định nghĩa khác.

a. *Hệ lực*: là một tập hợp nhiều lực tác dụng lên một vật rắn.

Kí hiệu: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$.

b. *Hệ lực tương đương*: Hai hệ lực được gọi là tương đương nhau, nếu như từng hệ lực một lần lượt tác dụng lên cùng một vật rắn có cùng trạng thái cơ học như nhau.

Ta biểu diễn hai hệ lực tương đương như sau:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \equiv (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$$

Dấu “ $\equiv$ ” là dấu tương đương.

Nếu hai lực tương đương có thể thay thế cho nhau được.

c. *Hệ lực cân bằng*: Là hệ lực mà dưới tác dụng của nó, vật rắn tự do có thể ở trạng thái cân bằng.

d. *Hợp lực*: Là lực tương đương với hệ lực.

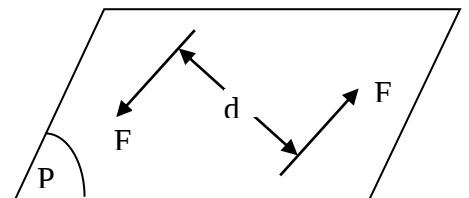
Ví dụ: Lực $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, ta kí hiệu $\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$

e. *Ngẫu lực*: là một hệ lực gồm hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ. Một ngẫu lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau:

- Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực là mặt phẳng P chứa hai lực thành phần của ngẫu lực được gọi tắt là mặt phẳng ngẫu lực (hình 1-2).

- Chiều quay của ngẫu lực trong mặt phẳng ngẫu lực.

- Cường độ tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng bởi tích số $F.d$ được gọi là trị số của mô men ngẫu lực, trong đó F là giá trị của các lực thành phần, d là khoảng cách vuông góc giữa hai lực thành phần được gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực. Đơn vị của ngẫu lực là Newton.met, kí hiệu N.m.



Hình 1-2

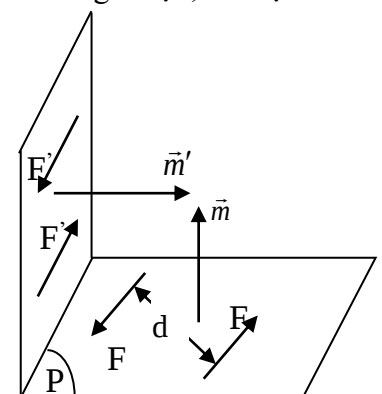
Trong không gian, ngẫu lực được biểu diễn bằng vector mômen ngẫu lực, kí hiệu là $\vec{m}$; được xác định như sau (hình 1-3):

- Phương: vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực.
- Chiều: nhìn từ ngọn xuống thấy chiều quay của ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ.
- Môđun của vector mô men ngẫu lực bằng trị số mômen ngẫu lực, tức bằng $\vec{m} = \pm F.d$.

Quy ước góc của vector $\vec{m}$ nằm trên mặt phẳng ngẫu lực.

Lấy dấu “+” khi chiều quay ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ và lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại.

f. *Liên kết và phản lực liên kết*: Liên kết là những điều kiện cản trở di chuyển của vật.



Hình 1-3

Trong tĩnh học các điều kiện đó được thể hiện bằng sự tiếp xúc trực tiếp giữa các vật. Vật bị cản gọi là vật không tự do. Lực tác dụng qua lại giữa các vật không tự do được gọi là lực liên kết. Các lực không phải là lực liên kết được gọi là lực đặt vào. Nếu khảo sát một

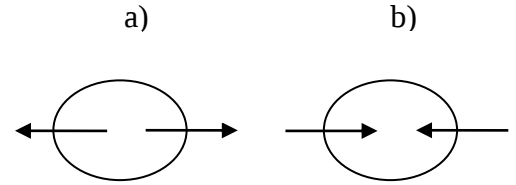
vật nào đó thì lực liên kết do vật khác tác dụng lên nó gọi là phản lực liên kết, còn lực do nó tác dụng lên các vật khác được gọi là áp lực.

1.1.2. Các định luật tĩnh học

Định luật 1: (Định luật về hai lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để một vật rắn nằm cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực có cùng đường tác dụng, ngược chiều nhau và cùng cường độ.

Hai lực thỏa mãn điều kiện này được gọi là hai lực cân bằng (hình 1-4 a,b).



Hình 1-4

Định luật 2: (Định luật thêm bớt hai lực cân bằng).

Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu thêm vào hoặc bớt đi hai lực cân bằng.

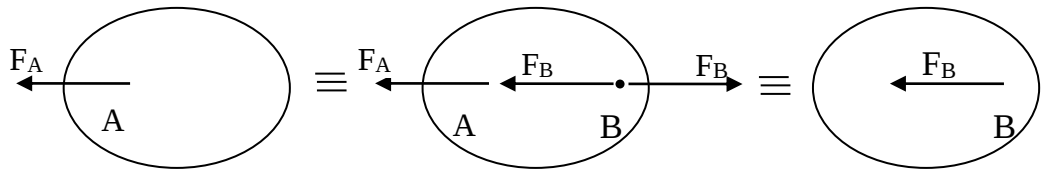
Từ hai tiên đề trên, ta có hệ quả:

Hệ quả (định lý trượt lực): Tác dụng của lực không thay đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của nó.

Nếu thêm hai lực cân bằng nhau $(\vec{F}_B, \vec{F}_B')$ tại B có cùng cường độ với lực $\vec{F}_A$, ta có (hình 1-5):

$$(\vec{F}_A) \equiv (\vec{F}_B, \vec{F}_B', \vec{F}_A) \equiv (\vec{F}_B)$$

Như vậy trong trường hợp của lực tác dụng lên vật rắn (và chỉ đối với vật rắn) điểm đặt lực không quan trọng, chỉ có đường tác dụng là quan trọng. Lực trong tĩnh học vật rắn là véc-tơ trượt.



Hình 1-5

Định luật 3: (Định luật hình bình hành lực)

Hai lực tác dụng tại một điểm tương đương với một lực tác dụng tại cùng điểm đó và có véc-tơ lực bằng véc-tơ chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai véc-tơ lực của các lực đã cho.

Nhờ định luật 3 phép cộng véc-tơ được sử dụng cho phép tính lực. Cần lưu ý rằng nhờ hệ quả trượt lực, điều kiện hai lực đặt tại một điểm có thể thay thế bằng điều kiện hai đường tác dụng của hai lực gặp nhau.

Định luật 4: (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng cường độ, cùng đường tác dụng và hướng ngược chiều nhau.

Chú ý rằng lực tác dụng và phản lực tác dụng không phải là hai lực cân bằng vì chúng không tác dụng lên cùng một vật rắn. Định luật tác dụng và phản tác dụng đúng cho mọi hệ quy chiếu (hệ quy chiếu quán tính và không quán tính) và là cơ sở cho phép mở rộng các kết quả đã khảo sát đối với bài toán một vật sang bài toán hệ vật.

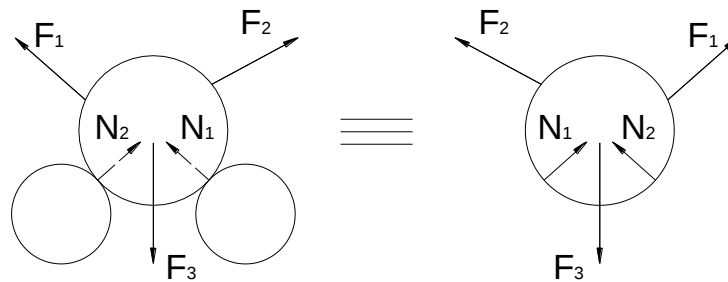
Định luật 5: (Định luật hóa rắn).

Một vật biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hóa rắn nó vẫn cân bằng.

Vậy hệ lực tác dụng lên “vật biến dạng cân bằng” thỏa mãn các điều kiện như hệ lực tác dụng lên vật rắn cân bằng. Do đó có thể sử dụng các kết quả khảo sát đối với vật rắn cân bằng cho trường hợp vật rắn biến dạng cân bằng. Tuy nhiên nó chỉ là điều kiện cần, không phải là điều kiện đủ. Để khảo sát bài toán cân bằng vật rắn biến dạng ngoài các kết quả nhận được khi khảo sát vật rắn cân bằng cần thêm vào các giả thuyết về biến dạng (ví dụ như định luật Húc trong sức bền vật liệu).

Định luật 6: (Định luật thay thế liên kết)

Vật không tự do cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng bằng cách giải phóng tất cả các liên kết và thay thế tác dụng các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết thích hợp.

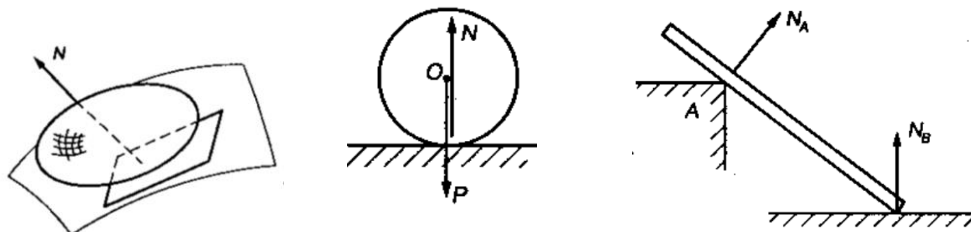


Hình 1-6

Một số quy tắc tìm các đặc trưng của các phản lực liên kết đối với một số liên kết thường gặp (các liên kết không ma sát) (hình 1-6).

a. Liên kết tựa.

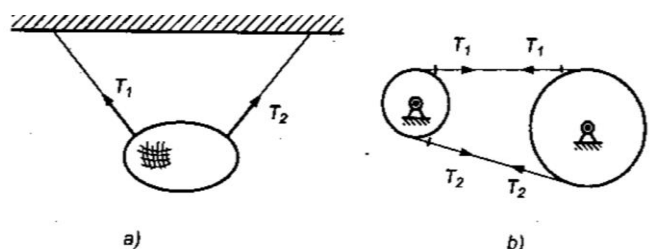
Hai vật tựa trực tiếp lên nhau, chỗ tiếp xúc là bề mặt hoặc đường hoặc điểm. Phản lực tựa có phương vuông góc với mặt tựa (hoặc đường tựa) (hình 1-7).



Hình 1-7

b. Liên kết dây mềm, thẳng và không dẫn.

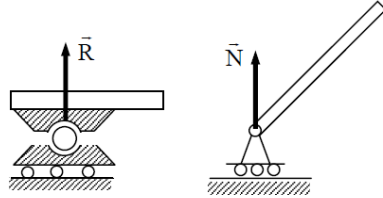
Phản lực của dây tác dụng lên vật khảo sát đặt vào điểm buộc dây và hướng vào dây. Phản lực của vật rắn tác dụng lên dây được gọi là sức căng dây, kí hiệu là T. Sức căng của dây hướng dọc dây và hướng ra khỏi mặt cắt dây. Trong trường hợp dây vòng qua vật thì phản lực dây hướng dọc dây và hướng ra ngoài mặt cắt của dây (hình 1-8a, b).



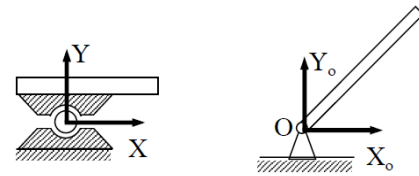
Hình 1-8

c. Liên kết bản lề.

Hai vật có liên kết bản lề khi chúng có trục (chốt) chung. Trong trường hợp này hai vật tựa vào nhau theo đường nhưng điểm tựa chưa được xác định. Phản lực liên kết $\vec{R}$ đi qua tâm của trục và có phương chiều chưa xác định. Phản lực được phân thành hai thành phần vuông góc với nhau ($\vec{R}_x \perp \vec{R}_y$), nằm trong mặt phẳng thẳng góc với đường trục tâm của bản lề. Khớp bản lề di động (hình 1-9a), khớp bản lề cố định (1-9b).



Hình 1-9a



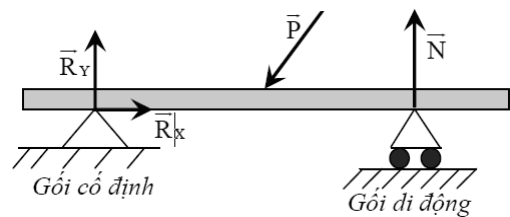
Hình 1-9b

d. Liên kết gối.

Dùng để đỡ các dầm, khung ... có loại gối cố định và gối có con lăn, phản lực liên kết của gối cố định được xác định như liên kết bản lề, còn phản lực liên kết của gối có con lăn được tìm theo qui tắc của phản lực liên kết tựa (hình 1-10).

- Liên kết gối cố định: Phản lực được xác định như khớp bản lề.

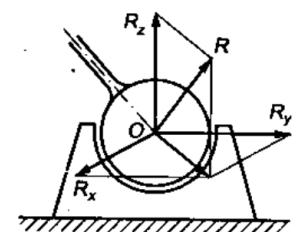
- Liên kết gối di động: Phản lực được xác định như liên kết tựa.



Hình 1-10

e. Liên kết gối cầu.

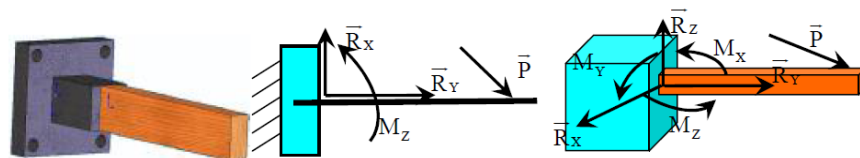
Được thực hiện nhờ một quả cầu gắn vào đầu của vật chịu liên kết và được đặt trong một vỏ cầu gắn liền với vật gây liên kết. Phản lực gối cầu đi qua tâm O của vỏ cầu, có phương, chiều chưa xác định. Thường phản lực gối cầu được phân thành 3 thành phần vuông góc ($\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$). Trường hợp tương tự liên kết gối cầu là liên kết cối (ổ chắn) (hình 1-11).



Hình 1-11

g. Liên kết ngàm.

Là liên kết khi vật được nối cứng vào một vật khác (ví dụ như hàn). Trong trường hợp ngàm phẳng phản lực liên kết gồm hai lực thẳng góc với nhau và một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa hai lực. Đối với ngàm không gian, phản lực liên kết gồm ba thành phần lực vuông góc với nhau (dọc 3 trục tọa độ) và ba thành phần ngẫu lực trong ba mặt phẳng tọa độ (hình 1-12).



Hình 1-12

h. Liên kết thanh.

Được thực hiện nhờ các thanh thỏa mãn các điều kiện sau: chỉ có lực tác dụng ở hai đầu, còn dọc thanh không có lực tác dụng và trọng lượng thanh được bỏ qua (ví dụ các

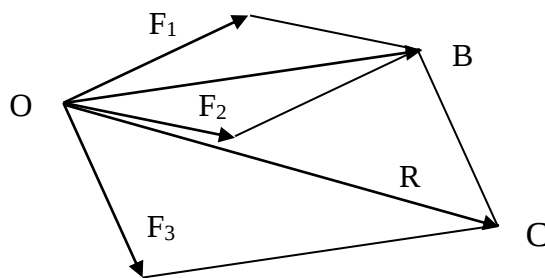
thanh không trọng lượng, liên kết bằng các liên kết trụ hoặc cầu). Phản lực có phương qua hai điểm chịu lực.

Nói chung, liên kết có thể có kết cấu đa dạng. Xác định phương chiều của phản lực liên kết trong trường hợp chung theo quy tắc sau: tương ứng với hướng di chuyển thẳng bị ngăn trở có phản lực ngược chiều, tương ứng với hướng di chuyển quay bị ngăn trở có ngẫu phản lực ngược chiều.

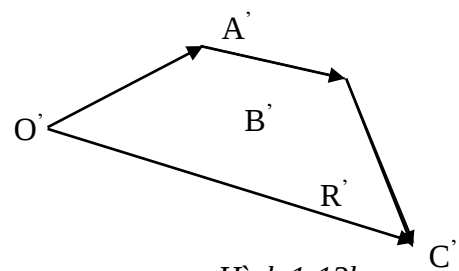
1.1.3. Các hệ quả.

1.1.3.1. Hợp các lực đồng quy.

Giả sử có hệ lực đặt tại O (trường hợp có đường tác dụng gặp nhau tại O thì áp dụng hệ quả trượt lực để đưa về trường hợp này). Áp dụng trực tiếp định luật về hình bình hành lực ta tìm được hợp lực của hệ lực $\vec{R}$ của hệ lực (hình 1-13a).



Hình 1-13a



Hình 1-13b

Hợp lực đi qua điểm đồng quy O và có véc-tơ lực:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N; \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1-1)$$

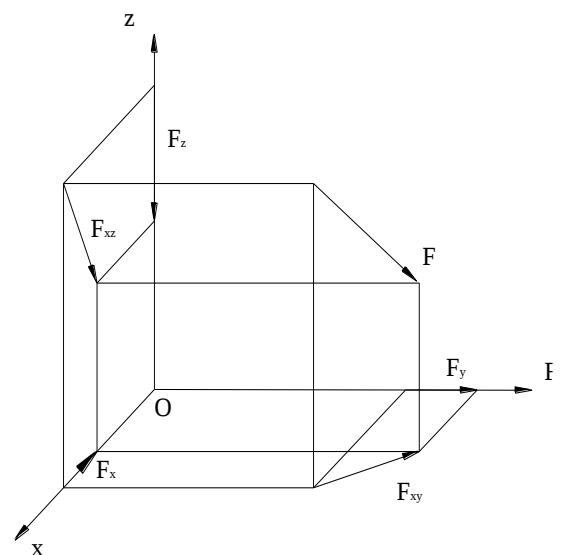
Để xác định véc-tơ lực của hợp lực có thể sử dụng phương pháp vẽ hoặc phương pháp xác định hình chiếu của nó trên 3 trục vuông góc.

a. Phương pháp vẽ.

Hợp lực được biểu diễn bằng véc-tơ khép kín của đa giác lực được xây dựng như sau: từ đầu mút của véc-tơ biểu diễn lực $\vec{F}_1$ vẽ véc-tơ $\vec{AB}$ song song và bằng véc-tơ lực $\vec{F}_2$, từ B vẽ véc-tơ $\vec{BC}$ song song và bằng véc-tơ lực $\vec{F}_3$ và cứ thế tiếp tục cho đến lực cuối cùng $\vec{F}_N$ ($N=3$). Đa giác lực OABC là đa giác lực của hệ ba lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$) cạnh $\vec{OC}$ là véc-tơ khép kín đa giác lực, nó biểu diễn hợp lực của ba lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$).

Vì hợp lực phải đi qua điểm O, nên đa giác lực không cần thiết phải vẽ xuất phát từ điểm đồng quy O mà có thể từ một điểm O' tùy ý (hình 1-13b).

Vậy hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng véc-tơ khép kín của đa giác lực đặt tại điểm đồng quy.



Hình 1-14

b. Phương pháp hình chiếu.

Khi chiếu hai vế của đẳng thức véc-tơ (1-1) lên ba trục tọa độ vuông góc ta được:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx} = \sum_{k=1}^N F_{kx} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny} = \sum_{k=1}^N F_{ky} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Nz} = \sum_{k=1}^N F_{kz} \end{aligned} \right\} (1-2)$$

Đó là ba hình chiếu của véc-tơ hợp lực lên ba trục tọa độ vuông góc. Từ đó có thể xác định được giá trị phương chiều của hợp lực:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad \cos(Ox, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(Oy, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(Oz, \vec{R}) = \frac{R_z}{R} \quad (1-3)$$

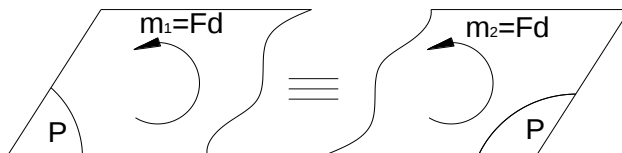
Véc-tơ khép kín $\vec{R}'$ của đa giác lực xuất phát từ một điểm O bất kỳ được gọi là véc-tơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$.

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1-4)$$

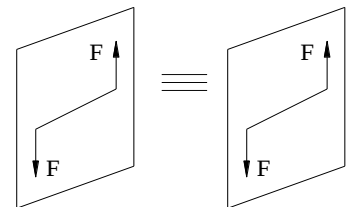
Định lý 1-1: Hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng véc-tơ chính của hệ lực đặt tại điểm đồng quy.

1.1.3.2. Các định lý biến đổi tương đương ngẫu lực.

Định lý 1-2: Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng, có cùng chiều quay và cùng trị số mô men (tức cùng mô men đại số) thì tương đương nhau (hình 1-15).



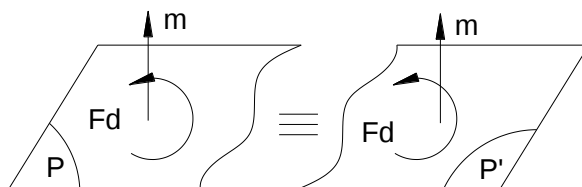
Hình 1-15



Hình 1-16

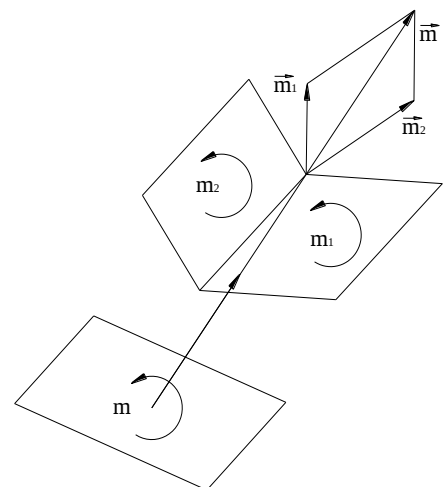
Định lý 1-3: Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi nó dời đến những mặt phẳng song song (hình 1-16).

Định lý 1-4: Hai ngẫu lực có cùng véc-tơ mô men thì tương đương nhau (hình 1-17).



Hình 1-17

Như vậy tác dụng của ngẫu lực hoàn toàn được đặc trưng bằng véc-tơ mô men ngẫu lực $\vec{m}$.



Hình 1-18

Trong trường hợp riêng khi xét tác dụng của ngẫu lực trong mặt phẳng thì tác dụng của nó hoàn toàn được đặc trưng bằng mô men đại số ngẫu lực $\bar{m} = \pm Fd$.

Định lý 1-5: Hợp các ngẫu lực được một ngẫu lực, có véc-tơ bằng tổng các véc-tơ mô men các ngẫu lực đã cho (hình 1-18):

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k \quad (1-5)$$

Định lý 1-6: Hợp các ngẫu lực trong cùng một mặt phẳng được một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng đã cho, có mô men đại số bằng tổng mô men đại số các ngẫu lực đã cho:

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^N \bar{m}_k \quad (1-6)$$

1.2. HỆ LỰC PHẪNG.

1.2.1. Véc-tơ chính và mô men chính của hệ lực phẳng.

1.2.1.1. Véc-tơ chính của hệ lực phẳng.

Cho hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$.

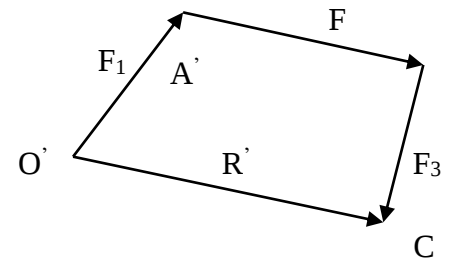
a. *Định nghĩa:* Véc-tơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$ là véc-tơ tổng của các véc-tơ lực của hệ lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1-7)$$

b. *Xác định véc-tơ chính có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác lực.*

Trong trường hợp này đa giác lực là đa giác phẳng (hình 1-19), cũng có thể xác định véc-tơ chính qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ vuông góc theo công thức (1-2). Trong trường hợp này chỉ cần xác định hai hình chiếu của nó trên hai trục vuông góc với nhau.

$$\begin{aligned} \vec{R}'_x &= \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{Nx} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{kx} \\ \vec{R}'_y &= \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{Ny} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ky} \end{aligned} \quad (1-8)$$



Hình 1-19

Giá trị, phương và chiều của véc-tơ chính được xác định theo công thức:

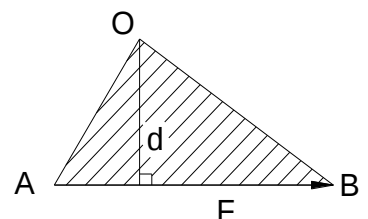
$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}; \cos(Ox, \vec{R}') = \frac{R'_x}{R'}; \cos(Oy, \vec{R}') = \frac{R'_y}{R'} \quad (1-9)$$

1.2.1.2. Mô men chính của hệ lực phẳng đối với một điểm.

a. *Mô men của một lực đối với một điểm:* Mô men của một lực đối với điểm O, kí hiệu $\bar{m}_O(\vec{F})$, là một đại lượng đại số:

$$\bar{m}_O(\vec{F}) = \pm Fd \quad (1-10)$$

Trong đó: F là trị số của lực, d là khoảng cách thẳng góc từ O đến đường tác dụng của lực, lấy dấu “+” khi lực có chiều quay quanh O ngược với chiều kim đồng hồ và lấy dấu “-” trong trường hợp ngược lại. Trong trường hợp (hình 1-20) thì:

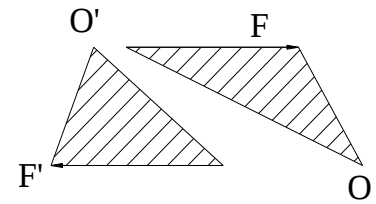


Hình 1-20

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = +Fd$$

Mô men của lực đối với điểm bằng không khi lực đi qua điểm lấy mô men. Về trị số mô men của lực đối với điểm bằng hai lần diện tích của tam giác có đỉnh là điểm lấy mô men, có cạnh đáy là véc-tơ lực:

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = 2dt\Delta OAB \quad (1-11)$$



Hình 1-21

Chú ý:

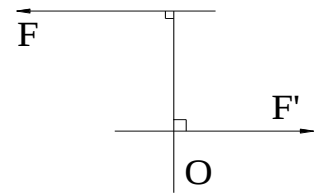
- Mô men của ngẫu lực bằng mô men của một lực thành phần đối với điểm nằm trên đường tác dụng của lực thành phần kia, tức là (hình 1-21):

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') \quad (1-12)$$

O nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}'$, còn O' nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}$.

- Mô men của ngẫu lực ($\vec{F}, \vec{F}'$) đối với một điểm O bất kì (tức là tổng mô men của lực $\vec{F}$ và $\vec{F}'$ đối với điểm O) chính bằng mô men của ngẫu lực, tức (hình 1-22):

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}') + \vec{m}_O(\vec{F}) \quad (1-13)$$



Hình 1-22

b. *Mô men chính của hệ lực phẳng đối với một điểm O:* là đại lượng đại số, kí hiệu $\vec{m}^O$, bằng tổng mô men của các lực của hệ lực đối với điểm O:

$$\vec{m}^O = \vec{m}^O(\vec{F}_1) + \vec{m}^O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}^O(\vec{F}_N) = \sum_{k=1}^N \vec{m}^O(\vec{F}_k) \quad (1-14)$$

c. *Nhận xét.*

- Véc-tơ chính là véc-tơ tự do, còn mô men chính phụ thuộc vào điểm lấy mô men, nghĩa là mô men chính lấy đối với hai điểm khác nhau sẽ khác nhau:

$$\vec{m}^{O'} = \vec{m}^O + \vec{m}_{O'}(\vec{R}_O) \quad (1-15)$$

Trong đó: $\vec{m}^{O'}$ và $\vec{m}^O$ là mô men chính của hệ lực đối với các điểm O' và O tương ứng, còn $\vec{m}_{O'}(\vec{R}_O)$ là mô men đối với điểm O' của véc-tơ chính đặt tại O.

- Đối với hệ lực đồng quy thì mô men chính của hệ lực đối với điểm đồng quy bằng không. Đối với hệ ngẫu lực thì véc-tơ chính của hệ ngẫu lực luôn luôn bằng không, còn mô men chính của hệ ngẫu lực đối với điểm bất kỳ O nào cũng bằng mô men của ngẫu lực tổng cộng tức bằng tổng mô men các ngẫu lực thành phần của hệ ngẫu lực.

1.2.2. Thu gọn hệ lực phẳng.

1.2.2.1. Định lý dời lực song song.

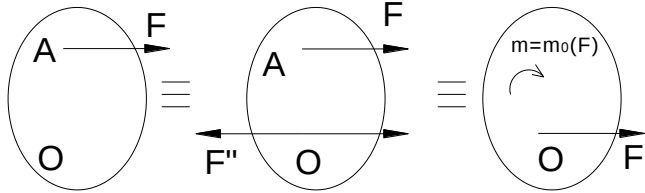
Định lý 1-7: Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó đặt tại O (lực $\vec{F}'$) và một ngẫu lực có mô men bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

$$\vec{F} \equiv \vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) \quad (1-16)$$

Chứng minh: Đặt tại O hai lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ có cùng trị số với lực $\vec{F}$. Theo định luật 2 (chương 1), ta có: $\vec{F} \equiv (\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F}) \equiv \vec{F}'$ và $(\vec{F}, \vec{F}'')$

$(\vec{F}, \vec{F}'')$ là một ngẫu lực có mô men: $\vec{m} = \vec{m}_{O(\vec{F})}$ theo (1-12).

Vậy (1-16) đã được chứng minh (hình 1-23)



Hình 1-23

1.2.2.2. Thu gọn hệ lực phẳng về tâm O.

Lấy một điểm O trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lý dời lực song song để dời các lực về tâm O (hình 1-24).

$$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}'_1 \text{ và ngẫu lực } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$$

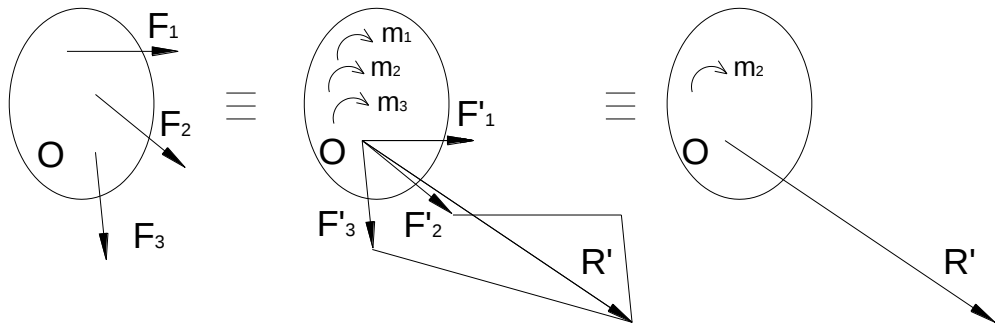
$$\vec{F}_2 \equiv \vec{F}'_2 \text{ và ngẫu lực } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$$

.....

$$\vec{F}_N \equiv \vec{F}'_N \text{ và ngẫu lực } \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_N)$$

Như vậy, thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$ về tâm O ta được hệ đồng quy tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_N)$ và hệ ngẫu lực phẳng: $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N)$.

Như đã biết, hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, được biểu diễn bằng véc-tơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (véc-tơ chính của hệ lực đồng quy thu về O và véc-tơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau):



Hình 1-24

$$\vec{R}'_O = \sum_{k=1}^N \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \vec{R}' \quad (1-17)$$

Trong đó: $\vec{R}'_O$ là hợp lực của hệ lực đồng quy thu về O, còn $\vec{R}'$ là véc-tơ chính của hệ lực phẳng đã cho.

Hệ ngẫu lực phẳng $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N)$, theo định lý 1-6 tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}$, nằm trong mặt phẳng của hệ lực:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_N)$$

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^N \bar{m}_O(\vec{F}_k) \quad (1-18)$$

Định lý 1-8: Hệ lực phẳng bất kỳ tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực. Chúng được gọi là lực và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn, có véc-tơ lực bằng véc-tơ chính của hệ lực, còn ngẫu lực thu gọn có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

Chú ý: Phương, chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn (vì véc-tơ chính là véc-tơ tự do) còn ngẫu lực thu gọn phụ thuộc vào tâm thu gọn (ngẫu lực thu gọn biến thiên theo tâm thu gọn và được tính theo công thức 1-15).

1.2.2.3. Các dạng chuẩn của hệ lực phẳng.

Dạng chuẩn là dạng đơn giản nhất nhận được khi thu gọn hệ lực. Từ kết quả thu gọn hệ lực phẳng về một tâm ta nhận được các dạng chuẩn sau:

a. Hệ lực phẳng cân bằng khi véc-tơ chính và mô men chính triệt tiêu:

$$\vec{R}' = 0; \quad \bar{m}^O = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \equiv 0$$

b. Hệ lực phẳng thu về một ngẫu lực khi véc-tơ chính triệt tiêu, còn mô men chính không triệt tiêu:

$$\vec{R}' = 0; \quad \bar{m}^O \neq 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \equiv \bar{m}^O$$

Trong hai trường hợp trên vì $\vec{R}' = 0$ nên theo công thức (1-15), mô men chính đối với mọi tâm đều bằng nhau, trong trường hợp a. bằng không đối với mọi tâm, còn trong trường hợp b. bằng $\bar{m}^O$ đối với mọi tâm.

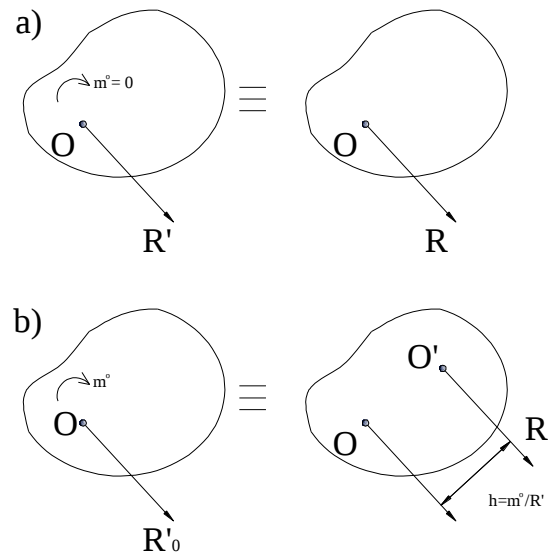
c. Hệ lực phẳng có hợp lực:

Khi $\vec{R}' \neq 0, \quad \bar{m}^O = 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \equiv \vec{R}'_O$, tức là hệ lực đã cho có hợp lực đặt tại O có véc-tơ lực bằng véc-tơ chính của hệ lực (hình 1-25a).

Khi $\vec{R}' \neq 0, \quad \bar{m}^O \neq 0$, hệ lực thu về tâm O được một lực $(\vec{R}_O)$ và một ngẫu lực $\bar{m}^O$, theo định lý dời lực song song có thể đưa về một lực có phương chiều và giá trị bằng phương, chiều và giá trị của véc-tơ chính nhưng đặt tại điểm O' khác O, cách O một đoạn $h = \frac{\bar{m}^O}{R'}$ sao cho mô men của hợp lực $\vec{R}$ đối với điểm O bằng $\bar{m}^O$ (hình 1-25b), tức

$\bar{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^N \bar{m}_O(\vec{F}_k)$. Vậy trong trường hợp hệ lực có hợp lực ta có định lý Varinhông:

Định lý 1-9 (định lý Varinhông): Trong trường hợp hệ lực có hợp lực, mô men của hợp lực đối với một điểm bất kỳ bằng tổng mô men của các lực của hệ lực đối với cùng điểm đó:



Hình 1-25

$$\bar{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^N \bar{m}_O(\vec{F}_k)$$

Từ đây dễ dàng suy ra rằng:

Hệ lực đồng quy phẳng có hai dạng chuẩn sau:

- Cân bằng nếu véc-tơ chính của hệ lực triệt tiêu.
- Hợp lực nếu véc-tơ chính của hệ lực không triệt tiêu.

Hệ ngẫu lực có hai dạng chuẩn sau:

- Cân bằng nếu mô men chính của hệ ngẫu lực triệt tiêu.
- Ngẫu lực nếu mô men chính của hệ ngẫu lực không triệt tiêu.

Hệ lực song song phẳng cùng chiều chỉ có một dạng chuẩn là hợp lực vì véc-tơ chính không triệt tiêu.

Hệ lực song song phẳng ngược chiều có thể có ba dạng chuẩn: cân bằng, ngẫu lực và hợp lực.

1.2.3. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng.

1.2.3.1. Điều kiện cân bằng.

Định lý 1-10: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là véc-tơ chính và mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kì phải đồng thời triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \\ \bar{m}^O = \sum_{k=1}^N \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad (1-19)$$

Chứng minh: Điều kiện cần được chứng minh dựa vào các dạng chuẩn của hệ lực vì nếu điều kiện (1-19) không thỏa mãn thì hệ lực phẳng hoặc tương đương với một lực hoặc một ngẫu lực, không thỏa mãn định luật 1. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì khi véc-tơ chính bằng không, hệ lực thu gọn về tâm O sẽ được một ngẫu lực, tức thu gọn về hai lực. Nếu ngẫu lực bằng không thì hai lực đó là hai lực cân bằng.

1.2.3.2. Các dạng phương trình cân bằng của hệ lực phẳng.

Điều kiện (1-19) có thể được viết dưới dạng các phương trình được gọi là các phương trình cân bằng. Có ba dạng phương trình cân bằng.

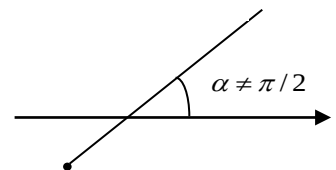
Dạng 1: Điều kiện cần và đủ để hệ lực cân bằng là tổng hình chiếu các lực trên hai trục tọa độ vuông góc và tổng mô men các lực đối với một điểm bất kỳ đồng thời triệt tiêu.

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^N \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (1-20)$$

Hai phương trình đầu tương đương với $\vec{R}' = 0$.

Phương trình cuối tương đương với $\bar{m}^O = 0$.

Dạng 2: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu các lực trên một trục và tổng mô men các lực đối với các tâm A và B tùy ý triệt tiêu, với điều kiện AB không vuông góc với trục chiếu (hình 1-26).



Hình 1-26

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0$$

Chứng minh:

Điều kiện cần được chứng minh dựa vào dạng chuẩn: Nếu một trong ba điều kiện trên không được thỏa mãn thì hệ đã cho tương đương với một lực hoặc một ngẫu lực, tức không thể cân bằng theo định luật 1.

Để chứng minh điều kiện đủ ta nhận xét rằng nếu ba điều kiện trên thỏa mãn thì hệ lực không có hợp lực, cũng không thể tương đương ngẫu lực. Thực vậy hệ lực không thể có hợp lực vì nếu hệ lực có hợp lực ($\vec{R} \neq 0$) thì dựa vào hai điều kiện cuối và dựa vào định lý Varinhong (định lý 1-8):

$$\sum_{k=1}^N \bar{m}_A(\vec{F}_k) = \bar{m}_A(\vec{R}) = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{m}_B(\vec{F}_k) = \bar{m}_B(\vec{R}) = 0$$

Tức hợp lực $\vec{R}$ phải đi qua hai điểm A, B. Điều này mâu thuẫn với điều kiện đầu:

$$\sum F_{kx} = R_x = R \cos \alpha = 0$$

Vì $R \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$ (do AB không vuông góc với trục x) nên $R \cos \alpha$ không thể triệt tiêu.

Hệ lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}^O$ nào khác không vì trong trường hợp này (do véc-tơ chính $\vec{R}'$ triệt tiêu):

$$\vec{m}^O = \vec{m}^A = \sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

Dạng 3: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của các lực đối với ba điểm A, B, C không thẳng hàng triệt tiêu (hình 1-27):

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \quad (1-21)$$

Chứng minh:

Điều kiện cần là hiển nhiên vì nếu một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì hệ lực tương đương với ngẫu lực khác không, sẽ không thỏa mãn định luật 1.

Để chứng minh điều kiện đủ, tương tự cách chứng minh cho dạng 2, nếu ba điều kiện được thỏa mãn thì hệ lực không có hợp lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực khác không.

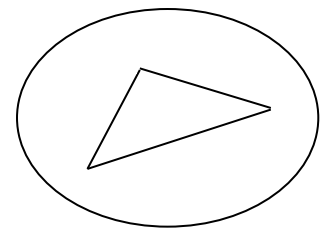
Hệ lực không thể có hợp lực vì dựa vào định lý Varinhong (định lý 1-8) nếu ba điều kiện trên thỏa mãn thì hợp lực phải đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Điều này vô lý, vậy $\vec{R} = 0$ tức $\vec{R}' = 0$. Hệ lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}^O$ nào khác không vì khi $\vec{R}' = 0$ ta có:

$$\vec{m}^O = \vec{m}^A = \sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

1.2.3.3. Phương pháp giải toán tĩnh học.

Bước 1:

- Chọn hệ vật khảo sát.
- Phân tích tất cả các lực tác dụng lên vật (hệ vật) dựa vào các liên kết đã học, nêu rõ các nội lực, ngoại lực, nếu chưa biết chiều thì giả thuyết một chiều nào đó.



Hình 1-27

- Lập điều kiện cân bằng của hệ vật.

Bước 2: Lập các phương trình cân bằng cho toàn hệ (phương pháp hóa rắn) hoặc ta có thể lập phương trình cân bằng cho từng vật (phương pháp tách vật).

Bước 3: Giải các phương trình.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 1-1: Một dầm AB có kích thước và chịu lực như hình 1-28. Cho biết: $M=4\text{kNm}$, $P=6\text{kN}$, $q=1,5\text{kN/m}$. Tìm phản lực tại A.

Giải

Ta khảo sát dầm AB cân bằng.

Hệ lực tác dụng lên dầm gồm có: ngẫu lực M , lực $\vec{P}$, còn phân bố đều q tat hay bằng lực tập trung $\vec{Q}$ đặt ở trọng tâm hình phân bố. Có trị số

$$Q=q.CD=1,5 \times 2=3\text{kN}.$$

Ở A liên kết ngàm, nên có phản lực gồm lực $\vec{R}_A$ (chia thành hai thành phần $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$) và ngẫu lực $\vec{M}_A$. Vì dầm cân bằng nên hệ lực tác dụng lên dầm:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{M}) = 0$$

Các phương trình cân bằng bằng cho hệ lực:

$$\sum F_x = X_A - P \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = Y_A - Q - P \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = -Pa - M - 2Q - PAB \sin 60^\circ = 0$$

Giải ba phương trình trên với các số liệu đã cho, ta có các kết quả sau:

$$X_A=3\text{kN}, Y_A=8,2\text{kN}, M_A=30,78\text{kN}$$

Các kết quả đều dương, nên chiều phản lực đúng như hình vẽ.

Ví dụ 1-2: Thanh đồng chất $OA=6a$, trọng lượng P_1 được gắn vào tường nhờ bả lè O và được đỡ nằm ngang nhờ thanh đồng chất $BC=4a$, có trọng lượng P_2 , bị ngàm ở C và nghiêng 30° với tường. Điểm A chịu lực $\vec{Q}$ thẳng đứng hướng xuống. Tìm các phản lực tại O, B và C (hình 1-29).

Giải

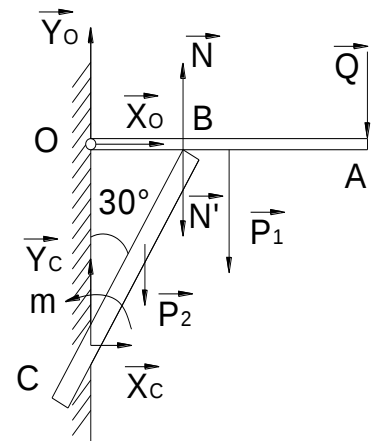
Xét hệ hai thanh chịu lực như hình 1-29:

Thanh OA chịu các lực $\vec{P}_1$, $\vec{Q}$, $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$, $\vec{N}$

Thanh CB chịu các lực $\vec{P}_2$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{m}$, $\vec{N}'$

Chú ý: Các lực $\vec{N}$ và $\vec{N}'$ có mô đun bằng nhau.

Hệ gồm hai thanh OA và BC. Ta xét trạng thái cân bằng của từng thanh và thiết lập phương trình cân bằng của



Hình 1-29

hệ lực tác dụng lên mỗi thanh. Phương pháp này gọi là phương pháp tách vật.

Thanh OA cân bằng dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\vec{P}_1, \vec{Q}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng cho hệ lực:

$$\sum F_x = X_O = 0$$

$$\sum F_y = Y_O + N - P_1 - Q = 0$$

$$\sum \bar{m}_O(\vec{F}) = 2aN - 3aP_1 - 6aQ = 0$$

Giải 3 phương trình, ta có kết quả:

$$X_O = 0; N = \frac{3}{2}P_1 + 3Q; Y_O = -\frac{1}{2}P_1 - 2Q$$

Thanh BC cân bằng dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\vec{P}_2, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{m}, \vec{N}') \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng cho hệ lực:

$$\sum F_x = X_C = 0$$

$$\sum F_y = Y_C - N - P_2 = 0$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}) = m - P_2a - 2aN = 0$$

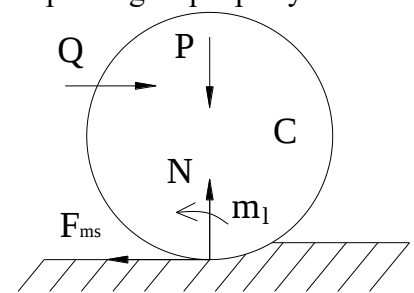
Giải 3 phương trình, ta có kết quả:

$$X_C = 0; Y_C = P_2 + N = P_2 + \frac{3}{2}P_1 + 3Q; m = P_2a + 3aP_1 + 6aQ.$$

Chiều của thành phần thẳng đứng của phản lực tại O ngược lại với chiều trên hình (vì trị số Y_O mang dấu âm).

1.2.4. Bài toán hệ lực phẳng với liên kết ma sát.

Trước đây các liên kết được giả thuyết là nhẵn, tức những liên kết không ma sát, ví dụ, đối với liên kết tựa ta giả thuyết rằng phản lực liên kết có phương là pháp tuyến của mặt tựa hoặc đường tựa. Tuy nhiên, có nhiều trường hợp giả thuyết như vậy là không cho phép (tức kết quả khảo sát theo giả thuyết này sai lệch khá xa với thực tế). Để làm rõ vấn đề này ta xét mô hình 1-30. Trong thực tế vật tiếp xúc với vật gây liên kết không phải tại một điểm mà theo một đường, do đó ta có một hệ các phản lực liên kết. Đây là một hệ lực phẳng. Sử dụng kết quả thu gọn hệ lực phẳng (định lý 1-8), hệ phản lực liên kết này có thể được thay (tương đương) bằng một lực và ngẫu lực nằm trong cùng mặt phẳng hệ lực. Lực thu gọn của các phản lực liên kết, gọi tắt là phản lực, có thể được phân ra hai thành phần vuông góc với nhau:



Hình 1-30

- Thành phần pháp tuyến mặt tựa có tác dụng chống lún, kí hiệu $\vec{N}$ được gọi là phản lực pháp tuyến.

- Thành phần tiếp tuyến với mặt tựa có tính chất cản trượt hoặc có xu hướng trượt được gọi là lực ma sát trượt, kí hiệu $\vec{F}_{ms}$. Ngẫu lực thu gọn của hệ phản lực liên kết có tính chất cản chuyển động lăn, được gọi là ngẫu lực ma sát lăn m_l (hình 1-30).

Hiển nhiên lực ma sát trượt có chiều ngược với chiều trượt hoặc có xu hướng trượt của vật, còn ngẫu lực ma sát lăn có chiều ngược với chiều lăn hoặc xu hướng lăn của vật.

Lực ma sát trượt (ngẫu lực ma sát lăn) chỉ xuất hiện khi vật trượt (lăn) hoặc có khuynh hướng trượt (khuynh hướng lăn) đối với vật khác. Ma sát xuất hiện khi vật chuyển động được gọi là ma sát động, còn ma sát khi vật chỉ có khuynh hướng chuyển động nhưng vẫn chưa chuyển động được gọi là ma sát tĩnh.

Thực nghiệm đã chỉ ra rằng trong trường hợp ma sát tĩnh các lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn có thể lấy giá trị bất kì trong miền giá trị của chúng. Nói khác đi, trong bài toán cân bằng có ma sát vật không phải cân bằng tại một vị trí mà có cả một miền cân bằng:

$$0 \leq F_{ms} \leq F_{ms}^{Max}; 0 \leq m_l \leq m_l^{Max}$$

F_{ms}^{Max} , m_l^{Max} là các giá trị lớn nhất của các lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn. Thực nghiệm xác minh rằng chúng tỉ lệ với phản lực pháp tuyến:

$$F_{ms}^{Max} = fN; m_l^{Max} = kN; k < f$$

f , k được gọi là hệ số ma sát trượt và hệ số ma sát lăn tương ứng. Cần chú ý rằng hệ số ma sát trượt là hư số, còn hệ số ma sát lăn có thứ nguyên chiều dài, chúng phụ thuộc vào nhiều yếu tố như vật liệu, trạng thái bề mặt tiếp xúc như độ nhẵn, trạng thái nhiệt, ...

Như vậy, trong trường hợp không bỏ qua ma sát được (ví dụ độ gồ ghề lớn, miền tiếp xúc rộng) thì hệ phản lực liên kết tại chỗ tiếp xúc ngoài phản lực pháp tuyến cần thêm lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn.

$$F_{ms} \leq fN \quad m_l \leq kN \quad (1-22)$$

Bất đẳng thức đầu mang tên là định luật Culong.

Ví dụ 1-4: Một vật rắn nằm trên mặt phẳng không nhẵn, có hệ số ma sát trượt f , nghiêng với một góc ngang một góc α . Xác định góc α để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của trọng lực (hình 1-31).

Giải

Khảo sát vật rắn cân bằng dưới tác dụng của trọng lực (lực hoạt động). Vật rắn có xu hướng trượt xuống nên ngoài lực pháp tuyến $\vec{N}$, còn lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ hướng dọc mặt phẳng nghiêng. Như vậy vật rắn cân bằng dưới tác dụng của ba lực động quy: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \equiv 0$

Các phương trình cân bằng có dạng:

$$\sum F_x = F_{ms} - P \sin \alpha = 0$$

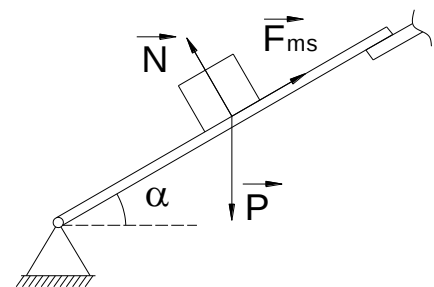
$$\sum F_y = N - P \cos \alpha = 0$$

Theo định luật Culong ta có: $F_{ms} \leq fN$

Từ các phương trình cân bằng ta tìm được:

$$F_{ms} = P \sin \alpha; N = P \cos \alpha$$

Thay các giá trị vào bất đẳng thức ma sát trượt (định luật Culong) ta có:



Hình 1-31

$$\sin\alpha \leq f \cos\alpha \text{ hay } \tan\alpha \leq f$$

Ta nhận được dấu đẳng thức khi sắp sửa trượt.

Giả sử ứng với trường hợp này góc α lấy giá trị α^* : $\tan\alpha^* = f$.

Bằng cách như vậy ta có một phương pháp đơn giản để đo hệ số ma sát trượt.

Ví dụ 1-5: Vật hình trụ có trọng lượng P bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc α . Khối trụ chịu tác dụng lực đẩy Q song song với mặt phẳng nghiêng. Tìm điều kiện khối trụ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng và điều kiện để nó lăn không trượt lên phía trên. Hệ số ma sát lăn là k và hệ số ma sát trượt là f .

Giải

Điều kiện để khối trụ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng là:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_{ms}) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng có dạng:

$$\sum F_x = Q - P \sin \alpha + F_{ms} = 0$$

$$\sum F_y = -P \cos \alpha + N = 0$$

$$\sum m_A = P.R \sin \alpha - Q.R - M_{ms} = 0$$

Giải ba phương trình trên ta được:

$$N = P \cos \alpha; F_{ms} = P \sin \alpha - Q; M_{ms} = R(P \sin \alpha - Q)$$

Mặt khác để khối trụ không lăn (hình 1-32a) không trượt xuống phải có thêm điều kiện:

$$M_{ms} \leq k.N; F_{ms} \leq f.N$$

Thay các kết quả tìm được vào bất phương trình ta được:

$$P \sin \alpha - Q \leq f P \cos \alpha; R(P \sin \alpha - Q) \leq k P \cos \alpha$$

Hay:

$$Q \geq P(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$Q \geq P(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha)$$

Thường thì $\frac{k}{R} < f$ do đó điều kiện tổng quát là:

$$\frac{Q}{P} \geq \sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \geq \sin \alpha - f \cos \alpha$$

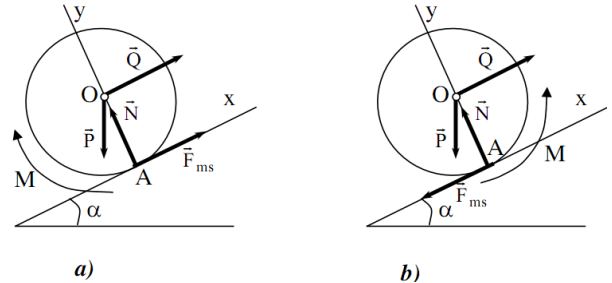
Để vật lăn không trượt lên (hình 1-32a) phải có điều kiện:

$$\sum F_x = Q - P \sin \alpha + F_{ms} = 0$$

$$\sum F_y = -P \cos \alpha + N = 0$$

$$\sum m_A = P.R \sin \alpha - Q.R + M_{ms} = 0$$

Giải ba phương trình trên ta được:



Hình 1-32

$$N = P \cos \alpha; F_{ms} = Q - P \sin \alpha; M_{ms} = R(Q - P \sin \alpha)$$

Mặt khác để khối trụ lăn (hình 1-32b) không trượt xuống phải có thêm điều kiện: $M_{ms} \geq k.N; F_{ms} \leq f.N$

Thay các kết quả tìm được vào bất phương trình ta được:

$$Q - P \sin \alpha \leq f P \cos \alpha; R(Q - P \sin \alpha) \geq k P \cos \alpha$$

Vậy điều kiện để khối trụ lăn không trượt trên là:

$$\sin \alpha + \frac{k}{R} \cos \alpha \leq \sin \alpha + f \cos \alpha$$

$$\text{Vì } \frac{k}{R} \text{ thường nhỏ hơn } f.$$

1.3. HỆ LỰC KHÔNG GIAN.

Hệ lực không gian là một tập hợp nhiều lực tác dụng lên cùng một vật rắn và có đường tác dụng nằm bất kỳ trong không gian.

1.3.1. Véc-tơ chính và véc-tơ mô men chính của hệ lực không gian.

1.3.1.1. Véc-tơ chính của hệ lực không gian.

Cho hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$.

a. *Định nghĩa:* Véc-tơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$, là véc-tơ tổng của các véc-tơ lực của hệ lực:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1-23)$$

b. *Xác định véc-tơ chính:* Có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác lực. Trong trường hợp này, đa giác lực là đa giác ghềnh.

Cũng có thể xác định véc-tơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} R'_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx} = \sum_{k=1}^N F_{kx} \\ R'_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny} = \sum_{k=1}^N F_{ky} \\ R'_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Nz} = \sum_{k=1}^N F_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2}; \quad \cos(Ox, \vec{R}') = \frac{R'_x}{R'};$$

$$\cos(Oy, \vec{R}') = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos(Oz, \vec{R}') = \frac{R'_z}{R'}$$

1.3.1.2. Mô men chính của hệ lực không gian đối với một điểm.

a. *Mô men của một lực đối với một điểm.*

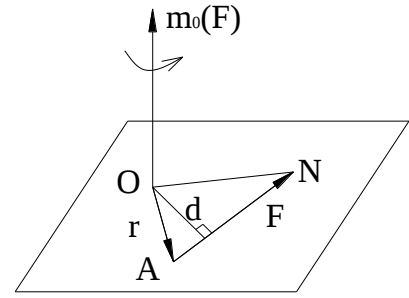
Mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O, kí hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$ là véc-tơ có:

- Phương vuông góc với mặt phẳng qua O và chứa $\vec{F}$.

- Chiều: nhìn từ đầu mút xuống thấy $\vec{F}$ quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O.

- Trị số bằng tích số của giá trị lực với tay đòn của lực đối với điểm O, tức bằng $F.d$ (hình 1-33). Đơn vị của mô men là Newton mét, kí hiệu Nm.

Dễ dàng thấy rằng véc-tơ mô men của lực đối với một điểm không thay đổi khi lực trượt trên đường tác dụng của nó và triệt tiêu khi lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy mô men ($d=0$). Trị số của mô men bằng hai lần diện tích tam giác ΔOAB (A là điểm đặt của lực, B là điểm mút của véc-tơ lực).



Hình 1-33

Từ định nghĩa đã nêu trực tiếp suy ra:

Véc-tơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tích có hướng (ngoại tích) của véc-tơ định vị điểm đặt lực $\vec{r} = O\vec{A}$ với véc-tơ lực $\vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (1-25)$$

b. Mô men của một lực đối với một trục.

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ , kí hiệu $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$ là mô men đại số của lực $\vec{F}'$ đối với điểm O, ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ , còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng π (hình 1-34)

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = \pm F'd' \quad (1-26)$$

Rõ ràng khi $\vec{F} = 0$ hoặc khi $\vec{F}$ song song hay cắt trục Δ (lực và trục đồng phẳng) thì $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

c. Định lí liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục (định lí 1-11).

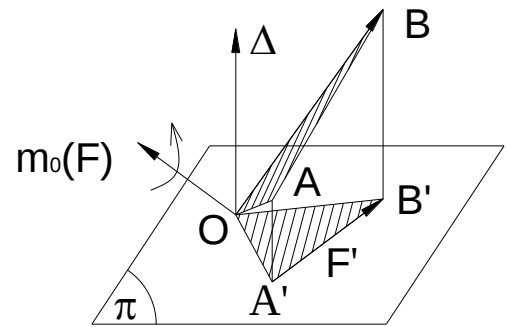
Định lí 1-11: Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu trên trục ấy của véc-tơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = h_{ch_\Delta}[\vec{m}_O(\vec{F})] \quad (1-27)$$

Áp dụng cho công thức (1-27) cho trường hợp trục Δ lần lượt là Ox , Oy , Oz mô men của lực $\vec{F}$ đối với ba trục $\vec{m}_x(\vec{F})$, $\vec{m}_y(\vec{F})$, $\vec{m}_z(\vec{F})$, còn hình chiếu của mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O trên ba trục là $\vec{m}_{Ox}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oy}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oz}(\vec{F})$, ta có:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \quad (1-28)$$

Vậy có thể thay thế việc tính hình chiếu trên một trục của véc-tơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O bằng tính mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục đó.



Hình 1-34

d. Véc-tơ mô men chính của hệ lực không gian đối với điểm O , kí hiệu $\vec{m}^O$, là một véc-tơ bằng tổng hình học các véc-tơ mô men của các lực đối với O .

$$\vec{m}^O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_N) = \sum_{k=1}^N \vec{m}_O(\vec{F}_k) \quad (1-29)$$

Véc-tơ mô men chính có thể được xác định bằng phương pháp đa giác véc-tơ (tương tự đa giác lực, ở đó các véc-tơ lực được thay thế bằng các véc-tơ mô men của lực), nhưng thuận tiện hơn, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ theo (1-28).

$$\vec{m}_O = \begin{cases} \vec{m}^{Ox} = \sum_{k=1}^N \vec{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^N \vec{m}_x(\vec{F}_k) \\ \vec{m}^{Oy} = \sum_{k=1}^N \vec{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^N \vec{m}_y(\vec{F}_k) \\ \vec{m}^{Oz} = \sum_{k=1}^N \vec{m}_{Oz}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^N \vec{m}_z(\vec{F}_k) \end{cases} \quad (1-30)$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiều của véc-tơ mô men chính.

d. Nhận xét.

- Mô men chính của hệ lực đồng quy đối với điểm đồng quy bằng không.
- Mô men chính của hệ ngẫu lực đối với bất kỳ điểm nào cũng bằng véc-tơ ngẫu lực tổng:

$$\vec{m}^O = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k \quad (1-31)$$

- Véc-tơ chính là véc-tơ tự do, còn véc-tơ mô men chính thay đổi theo điểm lấy mô men:

$$\vec{m}^{O_1} = \vec{m}^O + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}'_O) \quad (1-32)$$

1.3.2. Thu gọn hệ lực không gian.

1.3.2.1. Định lí dời lực song song.

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó tại O (lực $\vec{F}'$) và một ngẫu lực có véc-tơ mô men bằng véc-tơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (hình 1-35).

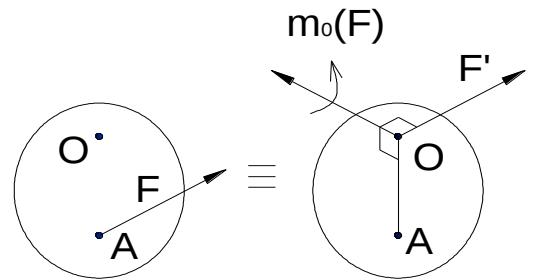
$$\vec{F} \equiv \vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) \quad (1-33)$$

Chúng minh định lí này giống như chứng minh cho trường hợp hệ lực phẳng, khi thay thế mô men đại số bằng véc-tơ mô men.

1.3.2.2. Thu gọn hệ lực không gian về tâm O.

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lí dời lực song song để dời các lực về tâm O (hình 1-36).

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &\equiv \vec{F}'_1 \text{ và } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1) \\ \vec{F}_2 &\equiv \vec{F}'_2 \text{ và } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2) \end{aligned}$$

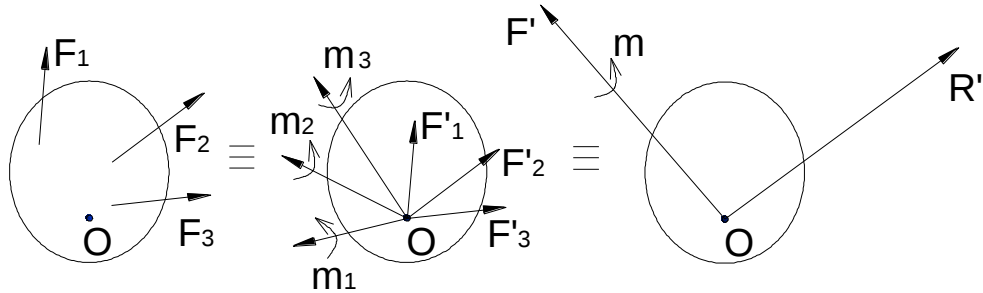


Hình 1-35

...

$$\vec{F}_N \equiv \vec{F}'_N \text{ và } \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_N)$$

Như vậy thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, về tâm O ta được một hệ lực đồng quy (không gian) tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_N)$ và một hệ ngẫu lực (không gian): $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N)$.



Hình 1-36

Hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, kí hiệu $\vec{R}'_O$, được biểu diễn bằng véc-tơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (véc-tơ chính của hệ lực đồng quy tại O và véc-tơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau):

$$\vec{R}'_O = \sum_{k=1}^N \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \vec{R}' \quad (1-34)$$

Trong đó $\vec{R}'$ là véc-tơ chính của hệ lực đã cho.

Hệ ngẫu lực không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N)$, như đã biết định lí 1-5 tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}$:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_N) \\ \vec{m} &= \sum_{k=1}^N \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{m}^O \end{aligned} \quad (1-35)$$

Dựa vào (1-29)

Định lí 1-12: Hệ lực không gian tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý, chúng được gọi là lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn có véc-tơ lực bằng véc-tơ chính của hệ lực, còn ngẫu lực thu gọn có véc-tơ mô men bằng véc-tơ mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

Nhận xét:

- Phương chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Sự biến đổi của ngẫu lực thu gọn theo tâm thu gọn phù hợp với công thức (1-32).
- Đối với hệ lực không gian, lực thu gọn không nằm trong mặt phẳng của ngẫu lực thu gọn như trường hợp hệ lực phẳng (tức véc-tơ chính và véc-tơ mô men chính không vuông góc với nhau như trường hợp hệ lực phẳng). Đây là sự khác biệt cơ bản giữa hệ lực không gian và hệ lực phẳng.

1.3.3. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

1.3.3.1. Điều kiện cân bằng.

Định lý 1-13: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là véc-tơ chính và véc-tơ mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kì triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = 0 \\ \vec{m}^O = \sum_{k=1}^N \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad (1-36)$$

Chứng minh:

Điều kiện cần được chứng minh dựa vào dạng thu gọn của hệ lực không gian. Thực vậy nếu điều kiện (1-36) không được thỏa mãn thì hệ lực đã cho thu về một trong các dạng: ngẫu lực, hợp lực hoặc một lực và một ngẫu lực. Dễ dàng chỉ ra rằng không có một dạng nào trong đó thỏa mãn định luật 1 về cân bằng.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì từ véc-tơ chính bằng không, hệ lực thu về một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn, nó bằng không thì chứng tỏ ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng.

1.3.3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

Để véc-tơ chính và véc-tơ mô men chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0 \\ \sum_{k=1}^N \bar{m}_x(\vec{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^N \bar{m}_y(\vec{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^N \bar{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \end{aligned} \quad (1-37)$$

Định lý 1-14: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên ba trục vuông góc và tổng mô men của các lực đối ba trục ấy đều triệt tiêu.

Các phương trình (1-37) được gọi là các phương trình cân bằng của hệ lực không gian.

Từ (1-37) có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt: hệ lực đồng quy không gian; hệ ngẫu lực không gian; hệ lực song song không gian. Đối với các hệ lực này số phương trình giảm xuống còn ba phương trình.

Ví dụ 1-6: Trục nằm ngang mang hai đĩa tròn.

Đĩa 1 có bán kính R, chịu tác dụng ngẫu lực M, đĩa 2 có bán kính r, chịu tác dụng lực $\vec{P}$ đặt ở vành và tạo với phương ngang x một góc α . Khoảng cách a được cho trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng trục và các đĩa. Xác định ngẫu lực M để có cân bằng và tìm các phản lực liên kết tại A và B (hình 1-37).

Giải

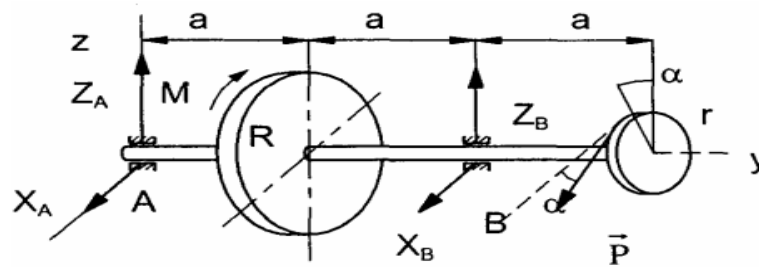
Chọn vật khảo sát, đặt các lực hoạt động và lực liên kết:

Xét cả hệ (trục và hai đĩa): tại A và B là liên kết bản lề (ổ trục)

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{M}, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \equiv 0$

Phương trình cân bằng:

$$\sum F_x = X_A + X_B + P \cos \alpha = 0$$



Hình 1-37

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = Z_A + Z_B - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum m_x = 2aZ_B - 3aP \sin \alpha = 0$$

$$\sum m_y = -M + RP = 0$$

$$\sum m_z = -2aX_B - 3aP \cos \alpha = 0$$

Giải hệ phương trình:

$$M=RP; X_A = \frac{P}{2} \cos \alpha; Z_A = -\frac{P}{2} \sin \alpha; X_B = -\frac{3}{2} P \cos \alpha; Z_B = -\frac{3}{2} P \sin \alpha$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Lực là gì? Cách biểu diễn lực.
2. Thế nào là hệ lực, hệ lực cân bằng, hệ lực tương đương.
3. Thế nào là liên kết, phản lực liên kết. Cách xác định phản lực liên kết.
4. Tiên đề giải phóng liên kết?
5. Định nghĩa vectơ chính của hệ lực phẳng, hệ lực không gian? Phương pháp xác định véc tơ chính của hệ lực phẳng, hệ lực không gian?
6. Định nghĩa mômen chính của hệ lực phẳng? Các xác định mômen đối với một điểm?
7. Phương pháp xác định lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn về một tâm?
8. Phương pháp giải bài toán cân bằng của một vật, của hệ vật?
9. Phương pháp giải bài toán cân bằng của vật rắn khi có ma sát?
10. Công thức xác định ba hình chiếu của véc tơ mômen chính đối với một điểm của hệ lên trên ba trục tọa độ vuông góc?
11. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian?
12. Trình bày qui tắc đa giác lực và điều kiện cân bằng qui tắc đa giác lực.
13. Ngẫu lực là gì?
14. Phát biểu và viết biểu thức toán học của định lý Varinhong.

Chương 2 ĐỘNG HỌC

Động học là phần cơ học nghiên cứu các tính chất hình học của chuyển động các vật, không kể đến quán tính và các lực tác dụng lên chúng để vật chuyển động. Động học cung cấp các phương pháp khảo sát chuyển động của chất điểm thường được sử dụng: phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ Đêcac, phương pháp tọa độ tự nhiên trong hệ quy chiếu đã xác định. Đồng thời cung cấp những kiến thức về chuyển động cơ bản của vật rắn, của điểm thuộc vật. Từ đó, ứng dụng vào một số chuyển động đơn giản thường gặp trong kỹ thuật, một số cơ cấu của máy.

2.1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM.

- Thiết lập phương trình chuyển động của chất điểm tại từng thời điểm đó là tập hợp các hệ thức xác lập mối quan hệ giữa các thông số vị trí của chất điểm (các thông số định vị) và thời gian, nhờ chúng có thể xác định vị trí của chất điểm tại từng thời điểm.

- Tìm các đặc trưng động học của chất điểm: vận tốc và gia tốc. Vận tốc là đại lượng cho biết phương, chiều và tốc độ của chất điểm, còn gia tốc cho biết sự thay đổi về phương, chiều và tốc độ của chất điểm.

Chuyển động của chất điểm là sự thay đổi vị trí của nó so với một vật chuẩn được chọn trước gọi là hệ quy chiếu. Tập hợp các vị trí của điểm trong không gian quy chiếu đã chọn được gọi là quỹ đạo của chất điểm trong hệ quy chiếu đó. Tùy thuộc quỹ đạo của chất điểm là đường thẳng hay đường cong mà chuyển động của nó được gọi là chuyển động thẳng hoặc chuyển động cong.

Để khảo sát động học của chất điểm có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Sau đây sẽ trình bày một số phương pháp thường hay được dùng.

2.1.1. Phương pháp véc tơ.

2.1.1.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động.

Xét chất điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu (A) theo quỹ đạo C (hình 2-1)

Thông số định vị (hình 2-1): Lấy điểm O gắn liền với hệ quy chiếu (A). Khi đó $\vec{r} = \vec{OM}$, xác định vị trí của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A), được gọi là véc-tơ định vị của chất điểm M.

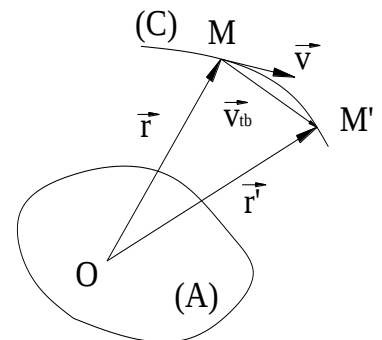
Phương trình chuyển động: Chất điểm M chuyển động nên $\vec{r}$ thay đổi theo thời gian:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (2-1) – được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm M dạng véc tơ.

2.1.1.2. Vận tốc chuyển động của điểm.

Giả sử tại thời điểm t và thời điểm lân cận $t' = t + \Delta t$, vị trí của chất điểm M được xác định bằng các véc-tơ định vị $\vec{r}$ và $\vec{r}'$ tương đương. Qua khoảng Δt véc-tơ định vị của chất điểm biến đổi một lượng $\vec{MM}' = \Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ (hình 2-1).

Đại lượng $\vec{v}_{tb} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ được gọi là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$.



Hình 2-1

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t được xác định như sau:

$$\vec{v} = \lim_{M' \rightarrow M} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2-2)$$

Như vậy vận tốc của chất điểm bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc-tơ định vị của chất điểm. Véc-tơ vận tốc của chất điểm hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M về phía chuyển động. Đơn vị của vận tốc là m/giây, kí hiệu m/s.

2.1.1.3. Gia tốc chuyển động của điểm.

Giả sử tại thời điểm t và thời điểm lân cận $t' = t + \Delta t$, chất điểm M có vận tốc tương ứng $\vec{v}$ và $\vec{v}'$ (hình 2-2).

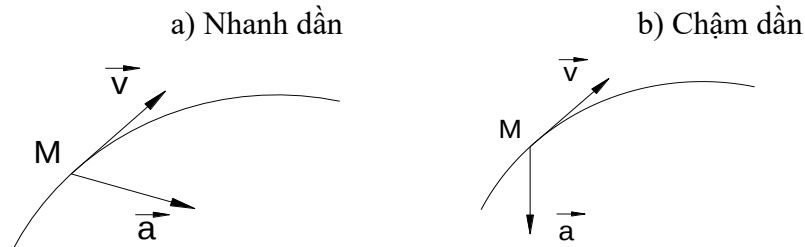
Đại lượng $\vec{a}_{tb} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ được gọi là gia tốc trung bình của chất điểm của chất điểm trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t được xác định như sau:

$$\vec{a} = \lim_{M' \rightarrow M} \vec{a}_{tb} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (2-3)$$

Như vậy gia tốc của chất điểm M bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của véc-tơ định vị. Véc-tơ gia tốc hướng về bề lõm của quỹ đạo. Đơn vị của gia tốc là mét/giây², kí hiệu là m/s².

2.1.1.4. Dấu hiệu về nhanh dần và chậm dần của chuyển động.



Hình 2-3

Chuyển động của chất điểm được gọi là nhanh dần (chậm dần) nếu $|\vec{v}|$, hoặc tương đương với nó, $\frac{1}{2}v^2$ hay $\frac{1}{2}(\vec{v})^2$ tăng (giảm) theo thời gian.

- Chất điểm chuyển động nhanh dần nếu (hình 2-3):

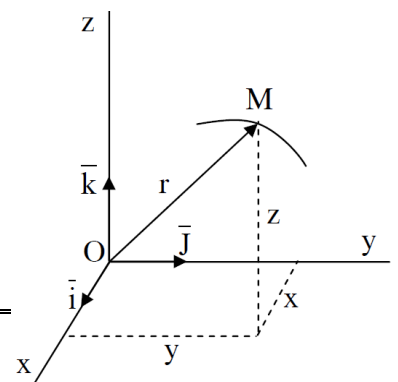
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = \vec{v} \vec{a} > 0 \quad (2-4a)$$

- Chất điểm chuyển động chậm dần nếu (hình 2-3):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = \vec{v} \vec{a} < 0 \quad (2-4b)$$

2.1.2. Phương pháp tọa độ Đề các.

2.1.2.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động.



Hình 2-4

Thông số định vị: Xét động điểm M chuyển động theo đường cong trong hệ trục tọa độ Đề các Oxyz (hình 2-4).

Các thông số định vị của chất điểm là 3 tọa độ x, y, z của chất điểm.

Phương trình chuyển động: Khi chất điểm M chuyển động, các tọa độ x, y, z của nó biến đổi liên tục theo thời gian:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}\quad (2-5)$$

Các phương trình (2-5) được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm M và cũng là phương trình quỹ đạo của chất điểm M viết dưới dạng tọa độ Đề các.

2.1.2.2. Vận tốc chuyển động của điểm.

Nếu gọi các véc-tơ đơn vị trên ba trục tọa độ là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ thì véc-tơ định vị và véc-tơ vận tốc có thể viết:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Suy ra:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (2-6)$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z}\end{aligned}\quad (2-7)$$

Hình chiếu véc-tơ vận tốc lên các trục tọa độ bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian các tọa độ tương ứng.

Dựa vào các biểu thức (2-7) dễ dàng xác định được véc-tơ vận tốc cả về độ lớn và phương chiều.

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ \cos(Ox, \vec{v}) &= \frac{v_x}{v}; \quad \cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(Oz, \vec{v}) = \frac{v_z}{v}\end{aligned}$$

Ví dụ 2-1: Cơ cấu tay quay con trượt OAB có OA=AB=l. Tay quay OA quay đều quanh O theo luật $\varphi = \omega_0 t$, $\omega_0 = \text{const}$. Lập phương trình chuyển động của trung điểm I của thanh truyền AB (hình 2-5).

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các như trên hình 2-5. Trung điểm I của thanh truyền AB có tọa độ $x=OI'$, $y=OI''$.

Từ hình vẽ ta tính được:

$$x = l \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} l \cos \omega_0 t = \frac{3}{2} l \cos \omega_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} l \sin \omega_0 t$$

Đó là phương trình chuyển động của trung điểm I của thanh truyền AB.

Gọi v_x, v_y lần lượt là hình chiếu của vận tốc điểm I lên các trục Ox và Oy. Theo công thức (2-7) ta tính được:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2} \omega_0 l \sin \omega_0 t; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \omega_0 l \cos \omega_0 t$$

Giá trị và phương chiều của vận tốc điểm I được xác định như sau:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{l \omega_0}{2} \sqrt{9 \sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t}$$

$$\cos(Ox, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{3 \sin \omega_0 t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t}}$$

$$\cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = -\frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t}}$$

2.1.2.3. Gia tốc của điểm.

Tương tự như đối với gia tốc, dựa vào biểu thức (2-3) ta nhận thấy:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \equiv \ddot{y} \quad (2-8)$$

$$a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \equiv \ddot{z}$$

Gia tốc chuyển động của điểm sẽ được xác định về độ lớn và phương chiều theo các biểu thức sau:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(Oy, \vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(Oz, \vec{a}) = \frac{a_z}{a}$$

2.1.2.4. Dấu hiệu nhanh dần, chậm dần của chuyển động.

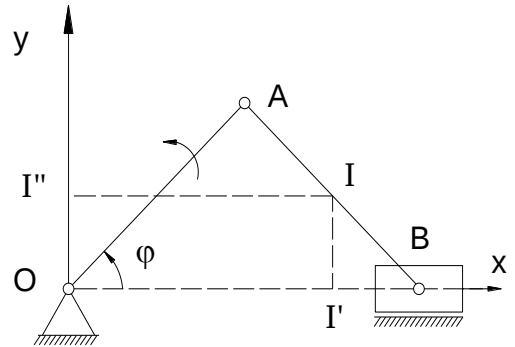
Chất điểm chuyển động nhanh dần khi:

$$\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} > 0$$

Chất điểm chuyển động chậm dần khi:

$$\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} < 0$$

2.1.3. Phương pháp tọa độ tự nhiên.



Hình 2-5

2.1.3.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động.

Thông số định vị: Xét chuyển động của chất điểm M dọc theo quỹ đạo (C). Chọn điểm O cố định trên quỹ đạo làm gốc và một chiều dương cho trước trên quỹ đạo (hình 2-6). Vị trí của chất điểm trên quỹ đạo được xác định nhờ thông số $\bar{s} = OM$ được gọi là thông số định vị của chất điểm.

Phương trình chuyển động: Khi chất điểm M chuyển động dọc theo quỹ đạo (C) thì $\bar{s}$ biến đổi liên tục theo thời gian.

$$\text{Vì vậy } \bar{s} = \bar{s}(t) \quad (2-9)$$

Được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm dọc theo quỹ đạo hoặc gọi là luật chuyển động của chất điểm trên quỹ đạo.

2.1.3.2. Vận tốc chuyển động của điểm.

Giả sử tại thời điểm t và thời gian lân cận t' chất điểm có vị trí tương ứng là M và M'. Xét chuyển động của chất điểm từ M đến M' ($MM' = d\bar{s}$, $\vec{MM}' = d\vec{r}$)

Từ công thức (2-2) ta có:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt} \vec{t}_0 \quad (2-10)$$

Trong đó: $\vec{t}_0$ - véc-tơ đơn vị trên phương tiếp tuyến có chiều thuận với chiều dương đã chọn trên quỹ đạo.

Gọi $\bar{v}_t$ là hình chiếu của véc-tơ vận tốc trên phương tiếp tuyến của quỹ đạo. Ta có:

$$\bar{v}_t = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad (2-11)$$

2.1.3.3. Gia tốc của điểm.

Từ (2-3) và (2-10) ta nhận được

$$\vec{a} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2} \vec{t}_0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_0 \quad (2-12)$$

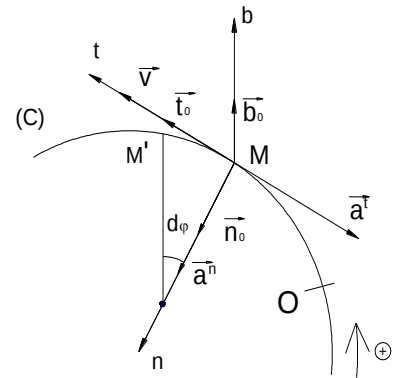
Để sử dụng công thức trên, ta sử dụng công thức sau:

$$\frac{d\vec{t}_0}{d\bar{s}} = \frac{\vec{n}_0}{\rho}$$

Trong đó: $\vec{n}_0$ - là véc-tơ đơn vị trên phương pháp tuyến hướng về bề lõm của đường cong quỹ đạo, ρ bán kính cong của quỹ đạo tại điểm M (khi quỹ đạo là đường tròn thì $\rho=R$).

Từ (2-12) ta nhận được các hình chiếu của gia tốc trên phương tiếp tuyến và pháp tuyến tương ứng là $\bar{a}^t$ và $\bar{a}^n$.

$$\bar{a}^t = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}; \bar{a}^n = \frac{v^2}{\rho}$$



Hình 2-6

$$a = \sqrt{(\bar{a}^t)^2 + (\bar{a}^n)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{s}}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|\bar{a}^t|}{\bar{a}^n} \quad (2-13)$$

Nhận xét: Chọn véc-tơ đơn vị $\vec{b}_0$ vuông góc với mặt phẳng chứa các véc-tơ $\vec{t}_0$ và $\vec{n}_0$ (mặt phẳng mật tiếp), sao cho $(\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0)$ tạo thành một tam diện thuận. Hệ trục tọa độ có gốc tại M và ba trục hướng theo ba véc-tơ $\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$ được gọi là hệ trục tọa độ tự nhiên. Trục Mt được gọi là trục tiếp, trục Mn – trục pháp tuyến chính, trục Mb - trục trùng pháp tuyến (hình 2-6).

- Véc-tơ vận tốc hướng dọc theo trục tiếp Mt.
- Véc-tơ gia tốc nằm trong mặt phẳng mật tiếp (mặt phẳng chứa trục tiếp tuyến và trục pháp tuyến), luôn luôn hướng về bề lõm của đường cong quỹ đạo. Do đó hình chiếu của gia tốc pháp trên trục pháp tuyến chính luôn dương. Trong chuyển động thẳng gia tốc pháp tuyến bằng 0 vì $\rho = \infty$.

2.1.3. Một số chuyển động thường gặp.

2.1.3.1. Chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của chất điểm có giá trị không đổi.

$$v = \text{const}; \quad \bar{a}^t = \frac{dv}{dt} = 0; \quad \bar{a}^n = \frac{v^2}{\rho} = 0; \quad \bar{a} = \bar{a}^n \quad (2-14)$$

Trong chuyển động thẳng đều: $a^t=0$; $a^n=0$ nên $a=0$.

Trong chuyển động cong đều: $\bar{a}^t = 0$; $a^n = \frac{v^2}{\rho}$; $\bar{a} = \bar{a}^n$

2.1.3.2. Chuyển động biến đổi đều.

Là chuyển động mà gia tốc của chất điểm có giá trị không đổi. Nếu chọn chiều dương quỹ đạo thuận chiều chuyển động của chất điểm thì:

$$v = \pm at + v_0; \quad s = \pm \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0 \quad (2-15)$$

Lấy dấu “+” ứng với chuyển động nhanh dần đều và lấy dấu “-” ứng với chuyển động chậm dần đều.

Trong các công thức trên v_0 và s_0 lần lượt là vận tốc và tọa độ cong của chất điểm tại thời điểm đầu.

Ví dụ 2-2: Xác định đoạn đường rơi thẳng đứng của một chất điểm có vận tốc ban đầu bằng không và khi chạm vào nền có vận tốc $v=49,05\text{m/s}$. Cho biết chất điểm rơi với gia tốc trọng trường $a=9,81\text{m/s}^2$.

Giải

Sử dụng công thức (2-15) trong đó lấy $v_0=0$. Chất điểm rơi nhanh dần nên:

$$v=at; \quad s = \frac{1}{2} at^2$$

Sau khi khử t giữa hai biểu thức trên, ta có: $s = \frac{v^2}{2a}$

Gọi h là đoạn đường rơi của chất điểm từ thời điểm ban đầu đến khi nó chạm vào nền (lúc đó $v=49,05\text{m/s}$), ta có:

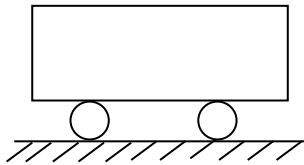
$$h = \frac{(49,05)^2}{2 \times 9,81} = 122,6\text{m}$$

2.2. CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN.

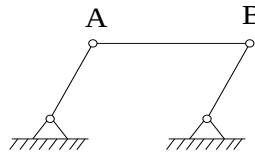
2.2.1. Chuyển động tịnh tiến.

2.2.1.1. Định nghĩa.

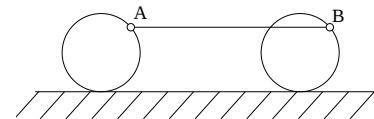
Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động tịnh tiến khi một đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật giữ phương không đổi trong quá trình chuyển động.



Hình 2-7



Hình 2-8



Hình 2-9

Ví dụ, chuyển động của thùng xe trên đoạn đường thẳng (hình 2-7), chuyển động của thanh truyền AB trong cơ cấu hình bình hành (hình 2-8), chuyển động của tay biên AB của tàu hỏa (hình 2-9).

2.2.1.2. Định lý.

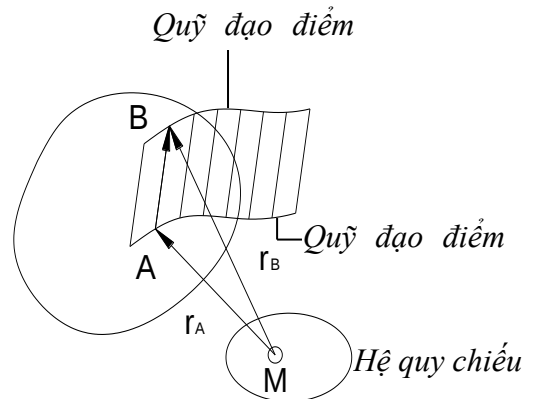
Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật vẽ nên những quỹ đạo đồng nhất (tức có thể đặt trùng khít lên nhau), tại mỗi thời điểm các điểm thuộc vật có vận tốc và gia tốc bằng nhau.

Chứng minh: Lấy hai điểm A và B thuộc vật. Các véc-tơ định vị của chúng liên hệ với nhau bằng hệ thức sau (hình 2-10).

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \quad (2-16)$$

Trong đó $\vec{AB}$ có mô đun không đổi (do tính chất của vật rắn tuyệt đối) và có phương chiều không đổi (do vật chuyển động tịnh tiến).

Vậy $\vec{AB}$ là véc-tơ hằng trong quá trình vật chuyển động. Do đó vị trí của điểm B có được bằng cách trượt điểm A trên giá chứa véc-tơ $\vec{AB}$ với véc-tơ hằng $\vec{AB}$. Trong phép trượt trên quỹ đạo của điểm sẽ đến trùng với quỹ đạo điểm B, tức là quỹ đạo của điểm A có thể đặt trùng khít lên quỹ đạo của điểm B (hình 2-10).



Hình 2-10

Do $\vec{AB}$ là véc-tơ hằng nên khi đạo hàm theo thời gian hai vế của đẳng thức (2-16), ta có:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \text{ hay } \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \text{ hay } \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Vậy việc khảo sát chuyển động vật tịnh tiến được đưa về khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ thuộc vật.

2.2.2. Chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

2.2.2.1. Định nghĩa.

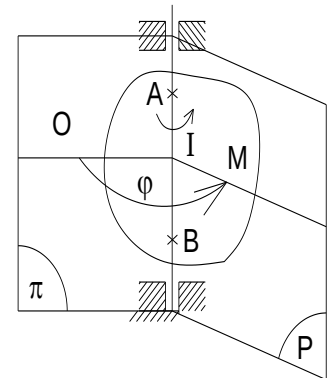
Chuyển động của vật rắn có hai điểm luôn luôn cố định được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định. Đường thẳng đi qua hai điểm cố định được gọi là trục quay (hình 2-11).

Khi một vật quay quanh một trục cố định, mỗi điểm thuộc vật sẽ chuyển động trên một đường tròn có tâm nằm trên trục quay, có bán kính bằng khoảng cách từ điểm đó đến trục quay được gọi là bán kính quay của điểm.

2.2.2.2. Khảo sát chuyển động của vật.

a. Phương trình chuyển động.

Thông số định vị: Chọn trước một chiều quay dương (thường là ngược chiều quay kim đồng hồ). Qua trục quay dựng hai mặt phẳng: mặt phẳng π gắn liền với hệ quy chiếu, được gọi là mặt phẳng quy chiếu và mặt phẳng P gắn liền với vật quay. Vị trí của vật được xác định nhờ vị trí của mặt phẳng động P đối với mặt phẳng quy chiếu cố định π . Thông số định vị của vật có thể chọn là góc nhị diện $\bar{\varphi}$ giữa hai mặt phẳng (hình 2-11).



Hình 2-11

Phương trình chuyển động: Khi vật chuyển động, góc $\bar{\varphi}$ thay đổi theo thời gian, vì vậy:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t) \quad (2-17)$$

được gọi là phương trình chuyển động của vật quay. Góc $\bar{\varphi}$ được tính bằng radian. Nếu tại thời điểm đầu mặt phẳng P trùng với mặt phẳng quy chiếu π thì $\bar{\varphi}$ là góc quay của vật. Góc quay của vật cũng có thể tính bằng số vòng quay N, $N = \bar{\varphi} / 2\pi$.

b. Vận tốc góc của vật, kí hiệu $\bar{\omega}$.

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \dot{\bar{\varphi}} \quad (2-18)$$

Như vậy vận tốc góc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc định vị $\bar{\varphi}$ của vật.

Vận tốc góc là đại lượng đại số. Dấu của $\bar{\omega}$ cho biết chiều quay của vật: dấu dương ứng với chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ) và dấu âm khi vật quay theo chiều âm (thuận chiều quay của kim đồng hồ). Giá trị $|\bar{\omega}| = \omega$ cho biết độ nhanh của chuyển động quay. Giá trị của vận tốc góc càng lớn thì vật quay càng nhanh. Đơn vị của vận tốc góc là radian/giây, kí hiệu rad/s hoặc 1/s.

Trong kĩ thuật người ta hay dùng đơn vị vòng/phút. Nếu gọi vận tốc góc là ω (rad/s) và tương ứng với nó, n (vòng/ phút) thì $\omega = \frac{2\pi n}{60} \approx 0,1n$ (rad/s).

c. Gia tốc góc, kí hiệu $\bar{\varepsilon}$.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\bar{\varphi}} \quad (2-19)$$

Như vậy gia tốc góc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc góc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của góc định vị $\bar{\varphi}$.

Đơn vị của gia tốc góc là radian/(giây)², kí hiệu rad/s² hoặc 1/s².

Gia tốc góc đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc góc theo thời gian. Khi $\bar{\varepsilon} \equiv 0$ thì $\bar{\omega} = \text{const}$, tức là vật quay với vận tốc góc không đổi, được gọi là vật quay đều (góc quay trong một đơn vị thời gian tại bất kỳ thời điểm nào cũng bằng nhau và do đó vật sẽ quay được những góc bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau).

d. Dấu hiệu quay nhanh, chậm của vật.

Khi $|\bar{\omega}| = \omega$ tăng (giảm) theo thời gian vật được gọi là quay nhanh (chậm) dần. Độ tăng giảm theo thời gian của đại lượng $|\bar{\omega}|$ được thay thế tương đương bằng sự tăng giảm theo thời gian của đại lượng $\frac{1}{2}\omega^2$ hay $\frac{1}{2}\bar{\omega}^2$. Từ đó ta có tiêu chuẩn sau:

- Vật quay nhanh dần khi $\bar{\omega}\bar{\varepsilon} > 0$ (2-20)

- Vật quay nhanh dần khi $\bar{\omega}\bar{\varepsilon} < 0$ (2-21)

e. Một số dạng chuyển động quay đặc biệt.

- Chuyển động quay đều. Khi vận tốc góc có giá trị không đổi

$$\omega = \text{const}; \bar{\varphi} = \pm \omega_0 t + \bar{\varphi}_0 \quad (2-22)$$

Lấy dấu “+” khi vật quay ngược chiều quay kim đồng hồ, lấy “-” khi vật quay cùng chiều quay kim đồng hồ, $\bar{\varphi}_0$ là góc định vị ban đầu của vật.

- Chuyển động quay biến đổi đều: Khi gia tốc góc có giá trị không đổi $|\bar{\varepsilon}| = \varepsilon_0 = \text{const}$, nếu chọn chiều dương của chuyển động quay thuận chiều quay của vật thì:

$$\bar{\omega} = \pm \varepsilon_0 t + \omega_0; \bar{\varphi} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \bar{\varphi}_0 \quad (2-23)$$

Lấy dấu “+” ứng với chuyển động quay nhanh dần đều, lấy dấu “-” ứng với chuyển động quay chậm dần đều.

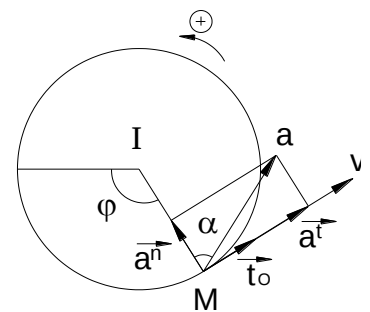
2.2.2.3. Khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật.

Xét một điểm M thuộc vật, nằm cách trục quay Δ một đoạn $IM=R$ được gọi là bán kính quay của điểm M. Khi vật quay, điểm M sẽ chuyển động trên đường tròn tâm I, là giao điểm giữa trục quay và mặt phẳng vẽ qua M vuông góc với trục quay, với bán kính IM .

a. Phương trình chuyển động của điểm.

Chọn giao điểm của mặt phẳng quy chiếu π với quỹ đạo tròn của điểm làm gốc quy chiếu trên quỹ đạo (hình 2-11). Các thông số định vị của điểm M là góc $\bar{\varphi}$ và bán kính $IM=R$, nó được gọi là bán kính quay của điểm M. Khi chọn chiều dương cho trước đối với quỹ đạo tròn phù hợp với chiều dương của chuyển động quay thì thông số định vị cũng có thể chọn là cung $OM = \bar{s} = R\bar{\varphi}$.

Vậy phương trình chuyển động của điểm M là (hình 2-12)



Hình 2-12

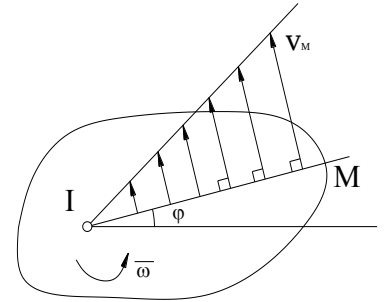
$$\bar{s} = R\bar{\varphi}(t) \quad (2-24)$$

b. Vận tốc của điểm.

Theo công thức (2-10) ta nhận được ($\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}$):

$$\bar{v} = R\bar{\omega}\bar{t}_0 \quad (2-25)$$

Vận tốc của điểm M có phương vuông góc với bán kính quay, có chiều thuận chiều quay, có giá trị bằng tích giữa vận tốc góc và bán kính quay (hình 2-12).



Hình 2-13

Các điểm nằm trên trục quay có vận tốc bằng không, các điểm nằm càng xa trục quay (tức là có bán kính quay càng lớn) thì có giá trị vận tốc càng lớn. Như vậy các điểm thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định và nằm trong cùng một mặt phẳng vuông góc với trục quay có vận tốc được phân bố theo luật tam giác vuông (hình 2-13).

c. Gia tốc của điểm.

Sử dụng các công thức (2-12), (2-13) trong đó chú ý (2-23), (2-24) và $\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}$; $\ddot{\bar{\varphi}} = \bar{\varepsilon}$ ta có:

Gia tốc tiếp $\bar{a}^t$ có phương vuông góc với bán kính quay, có chiều thuận hoặc ngược chiều quay của vật tùy thuộc vật quay nhanh dần hoặc chậm dần và có giá trị bằng tích số của gia tốc góc với bán kính quay (hình 2-12):

$$\bar{a}^t = R\bar{\varepsilon} = r\ddot{\bar{\varphi}} \quad (2-26)$$

Chú ý: Chiều của $\bar{a}^t$ thuận chiều với gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$.

Gia tốc pháp $\bar{a}^n$ hướng từ điểm M vào tâm I, có giá trị bằng tích số của bán kính quay và bình phương vận tốc góc (hình 2-12):

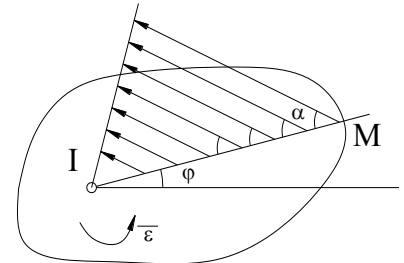
$$\bar{a}^n = R\omega^2 \quad (2-27)$$

Gia tốc toàn phần có giá trị bằng (hình 2-12):

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2-28)$$

Và nghiêng với bán kính quay MI một góc α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (2-29)$$



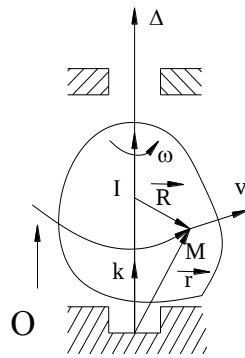
Hình 2-14

Như vậy, các điểm nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay của vật rắn quay quanh một trục cố định có gia tốc được phân bố theo quy luật tam giác thường đồng dạng với tỉ số đồng dạng bằng $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ (hình 2-14)

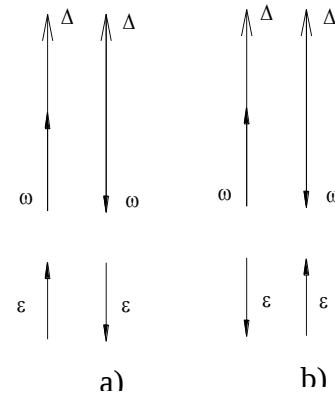
2.2.2.4. Biểu diễn véc-tơ một chuyển động quay.

a. Véc-tơ vận tốc góc $\bar{\omega}$ và véc-tơ gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$.

- Véc-tơ vận tốc góc $\bar{\omega}$ có phương dọc trục quay, có chiều khi nhìn từ nút xuống thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ, có moodun bằng giá trị của vận tốc góc (hình 2-15)



Hình 2-15



Hình 2-16

$$\text{Vậy} \quad \vec{\omega} = \overline{\omega} \vec{k} \quad (2-30)$$

Trong đó: $\vec{k}$ là véc-tơ đơn vị trên trục quay sao cho nhìn từ nút xuống thì chiều dương chọn trước của vật quay là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

- Véc-tơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\vec{k}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{k} = \vec{\varepsilon}\vec{k} \quad (2-31)$$

Vậy véc-tơ gia tốc góc có phương dọc trục quay, cùng chiều hoặc ngược chiều với véc-tơ vận tốc góc tùy thuộc vào vật quay nhanh dần hay chậm dần (hình 2-16).

b. Biểu thức véc-tơ của vận tốc điểm và gia tốc điểm.

Chọn một điểm O cố định trên trục quay. Véc-tơ định vị của động điểm M là véc-tơ $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Ta có các công thức sau đây:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (2-32)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}^t &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}; \vec{a}^n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ \vec{a} &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

Để chứng minh chỉ cần chú ý rằng (hình 2-14)

$$\vec{r} = O\vec{M} = O\vec{I} + I\vec{M} = O\vec{I} + \vec{R}$$

Trong đó $O\vec{I}$ đồng phương với $\vec{\omega}$ và là véc-tơ hằng khi vật quay, còn $\vec{R}$ là véc-tơ có moodun hằng

Vậy: $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge (\vec{OI} + \vec{R}) = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

Biểu thức $\bar{\omega} \wedge \bar{R}$ chính là vận tốc điểm M. Như vậy công thức (2-32) được chứng minh và nó có tên là công thức Ole.

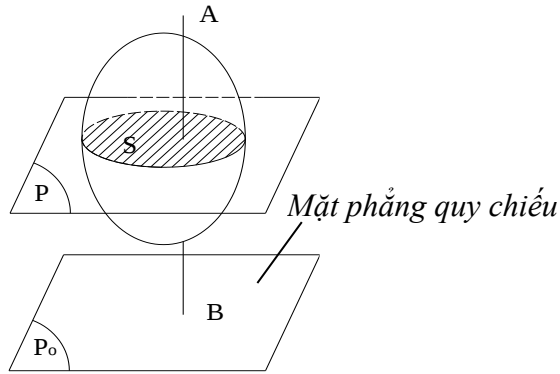
Công thức (2-33) được suy ra từ công thức (2-32) khi chú ý đến công thức (2-31).

2.3. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN.

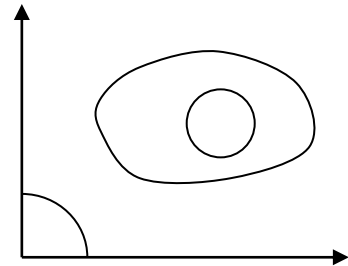
2.3.1. Định nghĩa và mô hình.

2.3.1.1. Định nghĩa.

Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động song phẳng khi mỗi điểm thuộc vật luôn luôn di chuyển trong một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cố định được chọn trước gọi là mặt phẳng quy chiếu (hình 2-17).



Hình 2-17

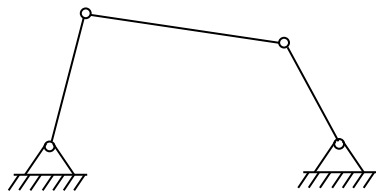


Hình 2-18

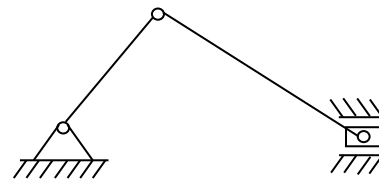
2.3.1.2. Mô hình của vật chuyển động song phẳng.

Bài toán khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của một tiết diện phẳng của nó trong mặt phẳng chứa tiết diện phẳng, song song với mặt phẳng quy chiếu (hình 2-18).

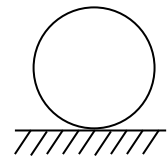
Trong các cơ cấu phẳng, các khâu của nó đều chuyển động song phẳng. Ví dụ: Cơ cấu tay quay thanh truyền (hình 2-19), cơ cấu bốn khâu bản lề (hình 2-20), một bánh xe lăn trên một đường cong phẳng trong mặt phẳng chứa đường cong (hình 2-21). Sau đây chuyển động của một tiết diện phẳng ta gọi là chuyển động của hình phẳng trong mặt phẳng chứa nó.



Hình 2-19



Hình 2-20



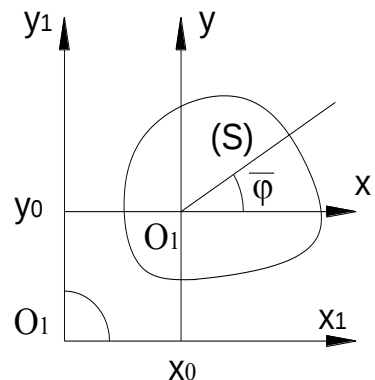
Hình 2-21

2.3.2. Khảo sát chuyển động của hình phẳng.

2.3.2.1. Phương trình chuyển động của hình phẳng S.

a. Thông số định vị.

Xét một hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng P. Trong mặt phẳng P chọn hệ trục cố định $O_1x_1y_1$, lấy một điểm O thuộc hình phẳng S và gắn vào đó một hệ trục Oxy có trục Ox luôn song song với trục O_1x_1 ; trục Oy luôn song song với trục O_1y_1 . Như vậy, hệ trục Oxy chuyển động tịnh tiến đối với hệ trục cố định $O_1x_1y_1$. Chuyển động đó được xác định hoàn toàn qua chuyển động của điểm O được gọi là cực. Vị trí của hình phẳng S được xác định khi xác định được vị trí của nó đối với hệ trục Oxy (qua góc định vị $\bar{\varphi}$) và vị trí của hệ trục động $O_1x_1y_1$ (qua các thông số định vị của cực O, ví dụ: x_0 và y_0).



Hình 2-22

Vậy các thông số định vị của hình phẳng đối với hệ trục cố định $O_1x_1y_1$ sẽ là x_0 , y_0 và $\bar{\varphi}$ (hình 2-22).

b. Phương trình chuyển động.

Khi hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng P chứa nó thì x_0, y_0 và $\bar{\varphi}$ thay đổi liên tục theo thời gian. Các đại lượng:

$$x_0 = x_0(t); y_0 = y_0(t); \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t) \quad (2-37)$$

được gọi là phương trình chuyển động của hình phẳng S.

Chú ý: Hai phương trình đầu mô tả chuyển động tịnh tiến của hệ trục động Oxy, còn phương trình cuối mô tả chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục động Oxy quanh trục qua O và vuông góc với hình phẳng. Bằng cách như vậy chuyển động của hình phẳng S được phân tích thành hai chuyển động: chuyển động tịnh tiến cùng hệ trục động Oxy và chuyển động quay đối với hệ trục động Oxy.

2.3.2.2. Các yếu tố động học của chuyển động hình phẳng.

Chuyển động của hệ trục động Oxy là chuyển động tịnh tiến cùng với cực O nên trạng thái động học của nó được xác định bằng vận tốc và gia tốc của cực O ($\vec{v}_0; \vec{a}_0$). Chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục động Oxy được xác định bằng vận tốc góc $\bar{\omega} = \dot{\bar{\varphi}}$ và gia tốc góc $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\bar{\varphi}}$.

Các đại lượng:

$$\vec{v}_0; \vec{a}_0; \bar{\omega}; \bar{\varepsilon} \quad (2-38)$$

Được gọi là các yếu tố động học của hình phẳng chuyển động song phẳng.

Các đại lượng $\vec{v}_0; \vec{a}_0$ phụ thuộc vào việc chọn cực, còn các đại lượng $\bar{\omega}; \bar{\varepsilon}$ không phụ thuộc vào việc chọn cực.

2.3.3. Khảo sát chuyển động các điểm thuộc hình phẳng.

2.3.3.1. Phương trình chuyển động của điểm.

a. Thông số định vị.

Xét một điểm M thuộc hình phẳng S nằm cách cực O một khoảng $OM=R$. Các thông số định vị của điểm M có thể được chọn là tọa độ x_M và y_M (hình 2-23).

$$\begin{cases} x_M = x_0 + R \cos \bar{\varphi} \\ y_M = y_0 + R \sin \bar{\varphi} \end{cases}$$

b. Phương trình chuyển động.

Vì x_0, y_0 , và $\bar{\varphi}$ thay đổi liên tục theo thời gian, nên:

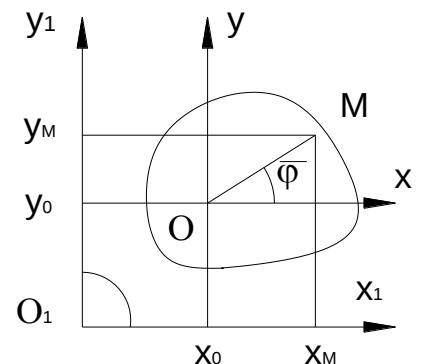
$$\begin{cases} x_M(t) = x_0(t) + R \cos \bar{\varphi}(t) \\ y_M(t) = y_0(t) + R \sin \bar{\varphi}(t) \end{cases} \quad (2-39)$$

Được gọi là phương trình chuyển động của điểm M.

2.3.3.2. Vận tốc các điểm.

a. Biểu thức giải tích của vận tốc.

Vận tốc của điểm M được xác định qua hình chiếu của nó trên hệ trục cố định $O_1x_1y_1$ (sử dụng công thức (2-7)):



Hình 2-23

$$\vec{v}_M \begin{cases} v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = \dot{x}_0 - R \sin \bar{\varphi} \dot{\bar{\varphi}} = \dot{x}_0 - R\bar{\omega} \sin \bar{\varphi} \\ v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = \dot{y}_0 - R \cos \bar{\varphi} \dot{\bar{\varphi}} = \dot{y}_0 + R\bar{\omega} \cos \bar{\varphi} \end{cases} \quad (2-40)$$

b. Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng.

Vì vận tốc của điểm cực O, tức $\vec{v}_0$ có các hình chiếu trên hệ trục cố định là $\dot{x}_0$ và $\dot{y}_0$, còn vận tốc của điểm M tính trong chuyển động của hình phẳng S quay quanh O đối với hệ trục Oxy, kí hiệu $\vec{v}_{MO}$ có các hình chiếu trên hệ trục cố định là $-R\bar{\omega} \sin \bar{\varphi}$ và $R\bar{\omega} \cos \bar{\varphi}$

Từ (2-40) ta nhận được:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{v}_{MO} \quad (2-41)$$

Định lý 2-1: Vận tốc của một điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của vận tốc cực O và vận tốc của nó khi hình phẳng quay (đối với hệ trục Oxy) quanh cực O.

Với hai điểm A và B bất kỳ thuộc hình phẳng, ta có:

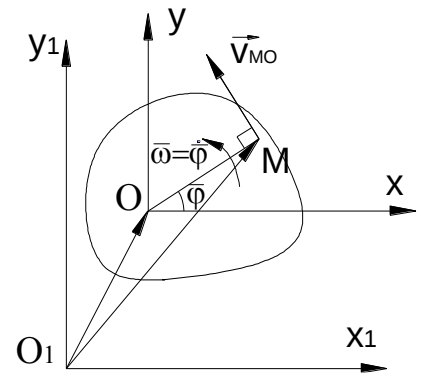
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

Trong đó $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B do hình phẳng S quay quanh A. Như vậy $\vec{v}_{BA}$ có phương vuông góc với đoạn thẳng AB. Chiều hai vế của đẳng thức vừa thiết lập lên đường thẳng qua hai điểm A, B (hình 2-26), ta có:

$$hc_{AB} \vec{v}_B = hc_{AB} \vec{v}_A \quad (2-42)$$

Từ đó nhận được định lý 2-2.

Định lý 2-2: Hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc hình phẳng lên phương qua hai điểm đó bằng nhau.

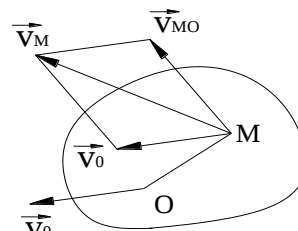


Hình 2-24

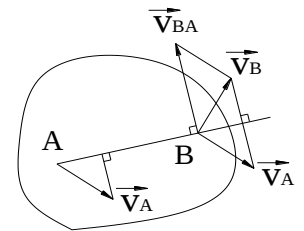
c. Tâm vận tốc tức thời và sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng.

- Tâm vận tốc tức thời.

Định nghĩa: Nếu tại thời điểm khảo tồn tại một điểm của hình phẳng có vận tốc bằng không thì điểm đó được gọi là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng (hình 2-27).



Hình 2-25



Hình 2-26

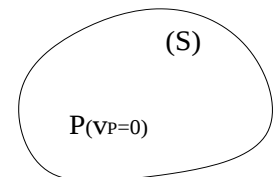
Định lý 2-3: Tại thời điểm vận tốc góc của hình phẳng khác không ($\bar{\omega} \neq 0$) thì tồn tại duy nhất một tâm vận tốc tức thời.

- Sự phân bố vận tốc của các điểm thuộc hình phẳng: Xét trường hợp tồn tại tâm vận tốc tức thời.

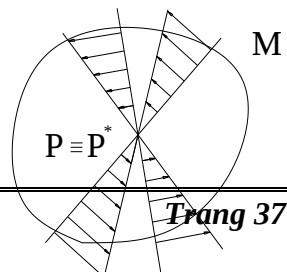
Chọn tâm vận tốc tức thời P làm cực. Sử dụng công thức (2-41) ta có:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP} \quad (2-43)$$

Tức là vận tốc điểm M bất kì thuộc hình phẳng S bằng vận tốc của nó trong chuyển động quay của hình phẳng quanh tâm vận



Hình 2-27



Hình 2-28

tốc tức thời (hình 2-28). Điểm P^* thuộc mặt phẳng cố định trùng với tâm vận tốc tức thời P được gọi là tâm quay. Ta có định lý 2-4.

Định lý 2-4: *Tại thời điểm tồn tại tâm vận tốc tức thời, vận tốc các điểm thuộc hình phẳng được phân bố giống như trường hợp quay quanh tâm vận tốc tức thời P (hình 2-28).*

Trong trường hợp này người ta gọi hình phẳng quay quanh tâm quay tức thời P^* .

Trong trường hợp không tồn tại tâm vận tốc tức thời ($\bar{\omega} = 0$) thì trong công thức (2-41) thành phần vận tốc tính trong chuyển động quay quanh cực bằng không ($\vec{v}_{MO} = 0$). Khi đó:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} = \vec{v}_O \quad (2-44)$$

Tức vận tốc mọi điểm thuộc hình phẳng đều bằng nhau và vận tốc cực O . Ta nhận được định lý 2-5.

Định lý 2-5: *Tại thời điểm không tồn tại tâm vận tốc tức thời ($\bar{\omega} = 0$) thì mọi điểm thuộc hình phẳng có vận tốc bằng nhau.*

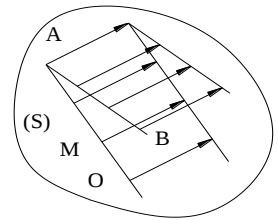
Trường hợp này hình phẳng được gọi là tịnh tiến tức thời (hình 2-29).

Chú ý: Quỹ đạo của điểm P trên hình phẳng được gọi là tâm tích động, quỹ đạo của điểm P^* (tâm quay) trên mặt phẳng cố định được gọi là tâm tích cố định. Người ta đã chứng minh được định lý 2-6.

Định lý 2-6: *Chuyển động của hình phẳng được thực hiện bằng cách cho tâm tích động lăn không trượt dọc tâm tích cố định.*

- Một số quy tắc tìm tâm vận tốc tức thời.

Trường hợp 1: Biết vận tốc điểm A và vận tốc góc của hình phẳng (hình 2-30). Tâm vận tốc tức thời nằm trên đường thẳng PA có được bằng cách quay $\vec{v}_A$ góc $\frac{\pi}{2}$ theo chiều quay $\bar{\omega}$ và $PA = \frac{v_A}{\omega}$.



Hình 2-29

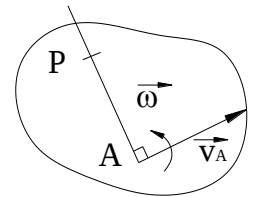
Trường hợp 2: Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc của điểm B cắt phương vận tốc của điểm A (hình 2-31).

Từ hai điểm A và B dựng hai đường vuông góc với các phương vận tốc của chúng. Giao điểm hai đường này là tâm vận tốc tức thời (hình 2-31).

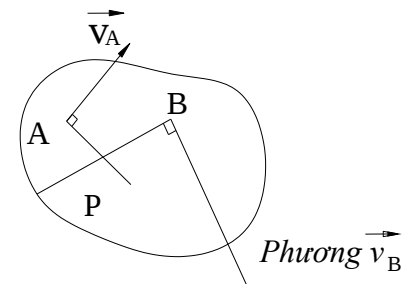
$$\omega = \frac{v_A}{AP} \text{ và } v_B = \omega PB = v_A \frac{PB}{PA}$$

Trường hợp 3: Biết vận tốc hai điểm A , B và phương vận tốc của chúng song song với nhau.

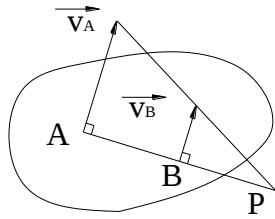
Nếu AB vuông góc với hướng vận tốc thì tâm vận tốc tức thời là giao điểm của phương chứa AB với đường thẳng nối các điểm mút của các vận tốc $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$.



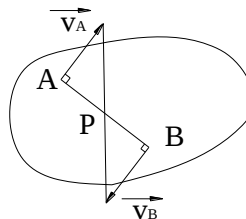
Hình 2-30



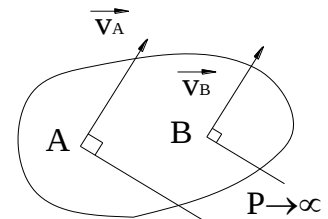
Hình 2-31



Hình 2-32



Hình 2-33



Hình 2-34

Trong trường hợp vận tốc hai điểm cùng chiều (hình 2-32) thì:

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB}$$

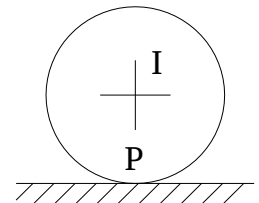
Đối với trường hợp vận tốc hai điểm ngược chiều nhau (hình 2-33) thì:

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}$$

Nếu AB không vuông góc với phương các vận tốc thì tâm vận tốc sẽ ở xa vô cùng (hình 2-34), ta có: $\omega=0$; $v_M=v_A=v_B$

Tức là hình phẳng chuyển động tịnh tiến tức thời.

Trường hợp 4: Hình phẳng lăn không trượt trên một đường cong phẳng cố định (hình 2-35). Trong trường hợp này điểm tiếp xúc giữa hình phẳng và đường sẽ là tâm vận tốc tức thời.



Hình 2-35

Ví dụ 2-3: Tay quay OA có chiều dài $r=0,1\text{m}$ quay đều với vận tốc góc $\omega_0=30\pi$ rad/s. Con trượt B chuyển động theo phương ngang.

Cho chiều dài của thanh truyền AB là $l = r\sqrt{3}$. Tại thời điểm đang xét tay quay OA vuông góc với thanh truyền AB (hình 2-36). Tìm:

- Vận tốc trượt B.
- Vận tốc góc thanh truyền AB.

Giải

Phân tích: Khâu OA chuyển động quay quanh trục cố định O. Thanh truyền AB chuyển động song phẳng, còn con trượt B chuyển động tịnh tiến. Tay quay OA làm với hướng ngang một góc 60° .

Vận tốc: Tính vận tốc điểm B. Viết công thức (2-41) cho điểm B khi chọn A làm cực:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (a)$$

Véc tơ $\vec{v}_A$ có chiều như hình 2- và có giá trị:

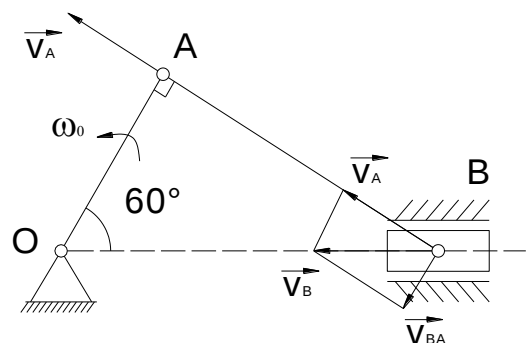
$$v_A = \omega_0 OA = \omega_0 r$$

Các véc tơ $\vec{v}_B$ và $\vec{v}_{BA}$ chỉ biết được phương:

$\vec{v}_B$ có phương dọc trục Ox còn $\vec{v}_{BA}$ có phương

vuông góc với $\vec{BA}$ (tức phương $\vec{AB}$):

$$v_B \cos 30^\circ = v_A$$



Hình 2-36

$$\text{Do đó: } v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{\omega_0 r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

Để tìm giá trị của $\vec{v}_{BA}$ ta chiếu hai chiều vế của bất đẳng thức (a) lên phương vuông góc với $\vec{v}_B$, tức lên phương thẳng đứng:

$$0 = v_A \cos 60^\circ - v_{BA} \cos 30^\circ$$

Từ đó ta tính được:

$$v_{BA} = v_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = v_A \tan 30^\circ = \omega_0 \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Vận tốc góc của thanh AB bằng:

$$\omega = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{\omega_0 r \sqrt{3}}{3l} = \frac{\omega_0}{3} = 10\pi \text{ rad/s}$$

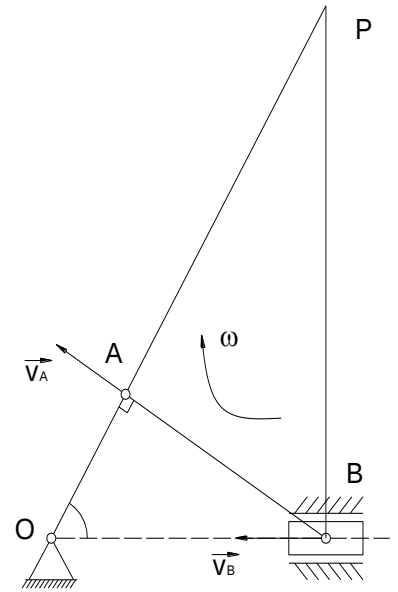
và tại thời điểm đang xét thanh AB quay thuận chiều kim đồng hồ.

Để tìm vận tốc điểm B cũng có thể sử dụng định lý hình chiếu vận tốc.

$$h_{CAB} \vec{v}_B = h_{CAB} \vec{v}_A \rightarrow v_B \cos 30^\circ = v_A$$

Kết quả tìm được trùng với kết quả ở trên.

Để giải bài toán trên cũng có thể sử dụng phương pháp tâm vận tốc tức thời. Tâm vận tốc tức thời của thanh AB tại thời điểm khảo sát là giao điểm của OA với đường thẳng đứng qua B (hình 2-37).



Hình 2-37

Ta có:

$$\omega = \frac{v_{BA}}{PA} = \frac{\omega_0 r}{l \tan 60^\circ} = \frac{\omega_0}{3} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Vận tốc điểm B được tính theo công thức:

$$v_B = \omega PB = \frac{\omega_0}{3} \frac{l}{\cos 60^\circ} = \frac{2\omega_0 r \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

2.3.3.3. Gia tốc của điểm.

a. Biểu thức giải tích.

Sử dụng công thức (2-8), ta nhận được:

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = \frac{d^2 x_M}{dt^2} = \ddot{x}_0 - R\bar{\varepsilon} \sin \bar{\varphi} - R\omega^2 \cos \bar{\varphi} \\ a_{My} = \frac{d^2 y_M}{dt^2} = \ddot{y}_0 + R\bar{\varepsilon} \cos \bar{\varphi} - R\omega^2 \sin \bar{\varphi} \end{cases} \quad (2-45)$$

b. Quan hệ gia tốc giữa hai điểm.

Từ (2-45) dễ dàng nhận thấy thành phần thứ nhất trong vế phải là các hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc cực O.

Thành phần thứ hai là hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc pháp của điểm M tính riêng trong chuyển động quay của S quanh O, kí hiệu $\vec{a}_{MO}^n$ hướng từ M đến cực O, có giá trị bằng $R\omega^2$.

Thành phần thứ ba là hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc tiếp của điểm M tính riêng trong chuyển động quay của S quanh cực O, kí hiệu $\vec{a}_{MO}^t$ có phương thẳng góc với MO, thuận chiều gia tốc góc ε và có giá trị bằng εR . Vậy (hình 2-38):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^n + \vec{a}_{MO}^t \quad (2-46)$$

Ta có định lí 3-6.

Định lí 2-6: Gia tốc của một điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của gia tốc cực O và gia tốc của nó khi hình phẳng quay (đối với hệ trục Oxy) quanh cực O.

Chú ý rằng gia tốc của điểm M tính trong chuyển động của hình phẳng quay quanh cực O, kí hiệu $\vec{a}_{MO}$, gồm hai thành phần gia tốc tiếp và gia tốc pháp:

$$\vec{a}_{MO} = \vec{a}_{MO}^n + \vec{a}_{MO}^t$$

c. Tâm gia tốc tức thời.

Định nghĩa: Tâm gia tốc tức thời là một điểm thuộc hình phẳng, tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không.

Tương tự như trường hợp tâm vận tốc tức thời, ta có định lí 2-7.

Định lí 2-7: Tại thời điểm vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng không đồng thời triệt tiêu thì tồn tại duy nhất một tâm gia tốc.

Định lí 2-8: Trong trường hợp tồn tại tâm gia tốc tức thời, sự phân bố gia tốc các điểm thuộc hình phẳng giống như sự phân bố của chúng khi hình phẳng quay quanh tâm gia tốc.

Chú ý: Tâm gia tốc nói chung không trùng với tâm vận tốc.

Ví dụ 2-4: Theo ví dụ 2-39. Tính gia tốc của con trượt B và gia tốc góc của thanh AB.

Giải

Sử dụng định lí 2-6 để tính gia tốc điểm B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

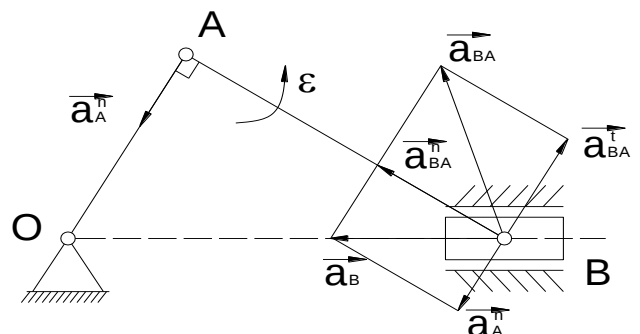
Thành phần $\vec{a}_A$ hướng từ A đến O và có giá trị:

$$a_A = r\omega_0^2 = 0,1(30\pi)^2 = 90\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Thành phần $\vec{a}_{BA}^n$ hướng từ B đến A và có giá trị:

$$a_{BA}^n = \omega^2 BA = (10\pi)^2 0,1\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Thành phần $\vec{a}_{BA}^t$ hướng vuông góc với AB tại B, có chiều chưa biết (chọn một chiều xác định, nếu đáp số dương thì chiều đã chọn



Hình 2-39

là đúng, nếu đáp số âm thì chiều đã chọn là sai, cần phải đổi lại chiều) và có giá trị:

$$a_{BA}^t = \varepsilon BA = \varepsilon r \sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

Phương chiều của các véc tơ trong bất đẳng thức (a) cho trên hình 2-39.

Để tìm giá trị của gia tốc điểm B ta chiếu đẳng thức (a) lên phương AB:

$$a_B \cos 30^\circ = a_{BA}^n$$

$$a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{10\sqrt{3}\pi^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Khi chiếu đẳng thức (a) lên phương thẳng đứng (vuông góc với $\vec{a}_b$) ta nhận được:

$$0 = a_A^n \cos 30^\circ - a_{BA}^n \cos 60^\circ - a_{BA}^t \sin 60^\circ$$

Từ đó:

$$a_{BA}^t = a_A^n - a_{BA}^n \tan 30^\circ = 90\pi^2 - 10\pi^2 = 80\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Ta dễ dàng tìm được gia tốc góc của thanh AB:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^t}{BA} = \frac{80\pi^2}{0,1\sqrt{3}} = \frac{800\sqrt{3}\pi^2}{3} \text{ rad/s}^2$$

Chiều của gia tốc ε phù hợp với chiều của $\vec{a}_{BA}^t$, tại thời điểm khảo sát có chiều ngược chiều kim đồng hồ. Thanh AB tại thời điểm khảo sát chuyển động chậm dần.

2.4. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG.

2.4.1. Tổng hợp chuyển động chất điểm.

2.4.1.1. Bài toán tổng hợp chuyển động chất điểm.

Có một chất điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu (B), còn hệ quy chiếu (B) chuyển động đối với hệ quy chiếu (A). Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A) được xem là tổng hợp từ hai chuyển động: chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (B) và chuyển động của hệ quy chiếu (B) đối với hệ quy chiếu (A). Để đơn giản ta coi hệ quy chiếu (A) là cố định.

Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (B) được gọi là chuyển động tương đối.

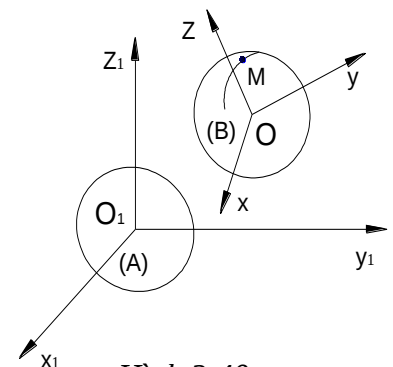
Chuyển động của hệ quy chiếu (B) đối với hệ quy chiếu (A) được gọi là chuyển động theo.

Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A) được gọi là chuyển động tuyệt đối (hình 2-40).

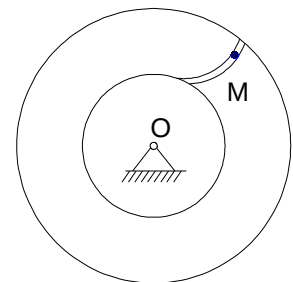
Ví dụ: Một hạt lỏng chuyển động trong rãnh cánh máy bơm là chuyển động tương đối, cánh máy bơm chuyển động đối với giá cố định là chuyển động theo, còn chuyển động của hạt đối với giá cố định là chuyển động tuyệt đối (hình 2-41).

2.4.1.2. Định lý hợp vận tốc.

Định nghĩa: Vận tốc tuyệt đối của chất điểm M là vận tốc



Hình 2-40



Hình 2-41

của nó được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{v}_a$:

$$\vec{v}_a = \frac{d}{dt}(\vec{O_1M})_{(A)} \quad (2-47)$$

Vận tốc tương đối của chất điểm M là vận tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (B), kí hiệu $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r = \frac{d}{dt}(\vec{OM})_{(B)} \quad (2-48)$$

Vận tốc theo: Xét điểm M^* thuộc hệ quy chiếu (B) mà tại thời điểm khảo sát trùng với chất điểm M. Vận tốc theo của chất điểm M, kí hiệu $\vec{v}_e$ là vận tốc của trùng điểm M^* của động chất điểm M.

$$\vec{v}_e = \frac{d}{dt}(\vec{OM}^*)_{(A)} \quad (2-49)$$

Định lí 2-9: Tại thời điểm, vận tốc tuyệt đối của chất điểm M bằng tổng hình học của vận tốc theo và vận tốc tương đối.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (2-50)$$

Chứng minh:

Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véc-tơ đơn vị của hệ trục Oxyz gắn liền với hệ quy chiếu (B); x, y, z là tọa độ của chất điểm M trong hệ tọa độ Oxyz (hình 2-42).

Theo (2-47) ta có:

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= \frac{d}{dt}(\vec{O_1M})_{(A)} = \frac{d}{dt}(\vec{O_1O} + \vec{OM})_{(A)} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{O_1O})_{(A)} + \frac{d}{dt}(\vec{OM})_{(A)} = \vec{v}_o + \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})_{(A)} \quad (2-50) \\ &= \vec{v}_o + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \end{aligned}$$

Dựa vào (2-48) với chú ý:

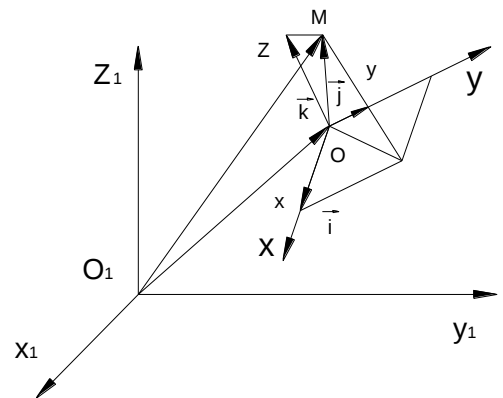
$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{(B)} = 0 \quad (2-51)$$

Ta tính được:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \frac{d}{dt}(\vec{OM})_{(B)} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})_{(B)} \\ \vec{v}_r &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (2-52) \end{aligned}$$

Để tính vận tốc theo của điểm M ta lấy chất điểm M^* là trùng điểm của M tại thời điểm khảo sát, nó có các tọa độ đối với hệ trục tọa độ động Oxyz là x^* , y^* , z^* , chúng là hằng số vì chất điểm M^* gắn liền với hệ quy chiếu động Oxyz nên:

$$\left(\frac{dx^*}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{dy^*}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{dz^*}{dt}\right)_{(B)} = 0 \quad (2-53)$$



Hình 2-42

Theo (2-49) ta có:

$$\begin{aligned}\vec{v}_e &= \frac{d}{dt} (O_1 \vec{M}^*)_{(A)} = \frac{d}{dt} (O_1 \vec{O} + O \vec{M}^*)_{(A)} = \vec{v}_O + \frac{d}{dt} (x^* \vec{i} + y^* \vec{j} + z^* \vec{k})_{(A)} \\ \vec{v}_e &= \vec{v}_O + x^* \frac{d\vec{i}}{dt} + y^* \frac{d\vec{j}}{dt} + z^* \frac{d\vec{k}}{dt}\end{aligned}\quad (2-54)$$

Khi so sánh (2-50), (2-52) và (2-54) với chú ý rằng tại từng thời điểm $x^* = x$; $y^* = y$; $z^* = z$ ta nhận được: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Như vậy định lí 2-9 được chứng minh.

2.4.1.3. Định lí hợp gia tốc.

Định nghĩa: Gia tốc tuyệt đối của chất điểm là gia tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \frac{d}{dt} (\vec{v}_a)_{(A)} \quad (2-55)$$

Gia tốc tương đối của chất điểm M là gia tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (B), kí hiệu $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_r = \frac{d}{dt} (\vec{v}_r)_{(A)} \quad (2-56)$$

Gia tốc theo của chất điểm M là gia tốc của trùng chất điểm M* được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{a}_e$:

$$\vec{a}_e = \frac{d}{dt} (\vec{v}_e)_{(A)} \quad (2-57)$$

Định lí 2-10: Tại mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối bằng tổng hình học của gia tốc theo, gia tốc tương đối và gia tốc Côriolic (kí hiệu $\vec{a}_c$):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (2-58)$$

Chứng minh:

Khi thay (2-50) vào (2-55) ta được:

$$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \frac{d}{dt} (\vec{v}_a)_{(A)} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_O + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right]_{(A)} \\ &= \vec{a}_O + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \vec{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)\end{aligned}\quad (2-59)$$

Còn thay (2-52) vào (2-56) với chú ý (2-51) ta có:

$$\vec{a}_r = \frac{d}{dt} (\vec{v}_r)_{(B)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right)_{(B)} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \quad (2-60)$$

Theo công thức (2-57) trong đó $\vec{v}_M$ được tính theo công thức (2-54) và chú ý đến (2-53) thì:

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \frac{d}{dt} (\vec{v}_M^*)_{(A)} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_o + x^* \frac{d\vec{i}}{dt} + y^* \frac{d\vec{j}}{dt} + z^* \frac{d\vec{k}}{dt} \right]_{(A)} \\ &= \vec{a}_o + x^* \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y^* \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z^* \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}\end{aligned}\quad (2-61)$$

Khi so sánh (2-59) với (2-60) và (2-61) với chú ý rằng tại mọi thời điểm $x^* = x$; $y^* = y$; $z^* = z$ ta nhận được:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Trong đó:

$$\vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \quad (2-62)$$

Được gọi là gia tốc Côriolic.

Công thức Côriolic $\vec{a}_c$: trường hợp hệ động Oxyz (hệ quy chiếu B) chuyển động tịnh tiến $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ thì $\vec{a}_c = 0$.

$$\text{Vậy} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \quad (2-63)$$

Định lý 2-11: Khi chuyển động theo là tịnh tiến thì gia tốc tuyệt đối của chất điểm M bằng tổng hình học của gia tốc theo và gia tốc tương đối.

Trường hợp hệ động Oxyz quay quanh một trục cố định với véc-tơ vận tốc góc theo $\vec{\omega}_e$. Sử dụng công thức Ôle (2-32), trong đó:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{k} \quad (2-64)$$

Và khi thay vào (2-62) ta có:

$$\vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 2\vec{\omega}_e \wedge \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right)$$

Vậy (hình 2-44):

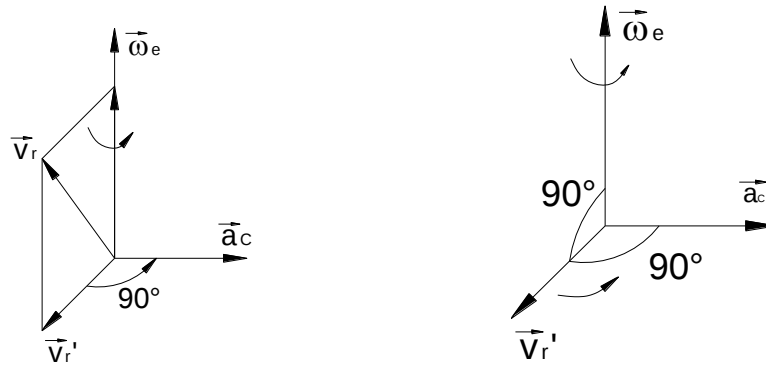
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \quad (2-64)$$

Công thức (2-64) còn đúng cho trường hợp hệ động Oxyz có chuyển động bất kì.

Chú ý:

- Tại thời điểm khảo sát nếu $\vec{\omega}_e // \vec{v}_r$ hoặc $\vec{v}_r = 0$ hay $\vec{\omega}_e = 0$ thì tại thời điểm này $\vec{a}_c = 0$ và công thức tính gia tốc sẽ theo (2-63)

- Trong trường hợp $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ (hình 2-43) thì có quy tắc tìm phương chiều của $\vec{a}_c$ như sau: quay $\vec{v}_r$ quanh gốc của nó theo chiều quay của hệ động quanh trục $\vec{\omega}_e$ một góc 90° , ta có ngay chiều của $\vec{a}_c$, còn giá trị của nó bằng $2\omega_e v_r$.



Hình 2-43

Ví dụ 2-5: Tay quay OA có độ dài bằng R, quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_0 khi cơ cấu có vị trí như hình 2-44, tìm:

- Vận tốc tương đối của con trượt A đối với cần lắc O_1B , vận tốc ω_1 của con lắc O_1B ?
- Gia tốc tương đối của con trượt A đối với cần lắc O_1B , gia tốc góc ε của cần lắc O_1B ?

Giải

Phân tích: Xem con trượt A là một chất điểm, ta có chất điểm A chuyển động dọc O_1B quay quanh O_1 gắn với giá cố định. Khi chọn O_1B làm hệ quy chiếu động thì:

- Chuyển động theo của chất điểm A là chuyển động của cần lắc quanh trục O_1 đối với giá cố định.
- Chuyển động tương đối của chất điểm A là chuyển động thẳng của nó dọc theo cần lắc O_1B .
- Chuyển động tuyệt đối của chất điểm A là chuyển động tròn đều (do tay quay OA quay đều) trên đường tròn tâm O, bán kính $OA=R$.

Vận tốc: Theo định lý 2-9 cho chất điểm A: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

- $\vec{v}_a$ có phương vuông góc với OA, thuận chiều quay của tay quay OA (cùng chiều ω_0) và có giá trị: $v_a = R\omega_0$
 - $\vec{v}_r$ hướng dọc trục O_1B , giá trị chưa xác định.
 - $\vec{v}_e = \vec{v}_{A^*}$, A^* là điểm của O_1B trùng với chất điểm A.
- Vậy $\vec{v}_e$ có phương vuông góc với O_1B , giá trị chưa xác định.

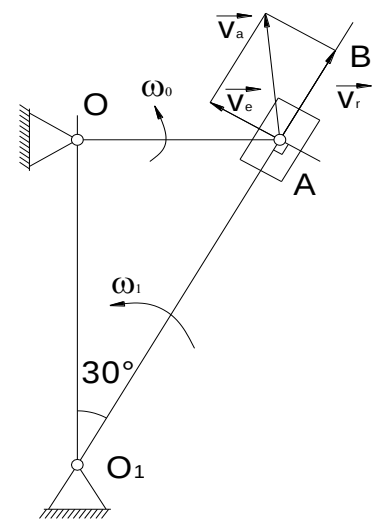
Sử dụng quy tắc hình bình hành trong phép tính vec tơ ta dễ dàng tìm được:

$$v_r = v_a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \omega_0;$$

$$v_e = v_a \sin 30^\circ = \frac{1}{2} R\omega_0$$

Vì $v_e = v_{A^*} = \omega_1 O_1A^*$ nên:

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A^*} = \frac{R}{2} \frac{\omega_0}{2R} = \frac{\omega_0}{4} \text{ rad/s}$$



Hình 2-44

Tại thời điểm khảo sát cần lắc quay ngược chiều kim đồng hồ, tức quay theo chiều dương ($\omega_1 > 0$).

Gia tốc: Vì chuyển động theo là chuyển động quay quanh một trục cố định nên (hình 2-): $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

- $\vec{a}_A$ hướng từ A đến O, có giá trị: $a_A = R\omega_0^2$

Để tìm phương chiều của $\vec{a}_C$ ta quay $\vec{v}_r$ quanh A theo chiều ω_1 một góc 90° , còn giá trị: $a_C = 2\omega_1 v_r = 2 \frac{\omega_0}{4} \frac{R\sqrt{3}}{2} \omega_0 = \frac{R\sqrt{3}}{4} \omega_0^2$

- $\vec{a}_r$ có phương dọc O_1B , chiều và giá trị chưa xác định.

- $\vec{a}_e = \vec{a}_{A^*}$. Vì A là điểm trên của cần lắc O_1B nên $\vec{a}_{A^*} = \vec{a}_{A^*}^n + \vec{a}_{A^*}^t$

- $\vec{a}_{A^*}^n$ hướng từ A đến O_1 và có giá trị:
 $a_{A^*}^n = \omega_1^2 O_1A^* = \frac{\omega_0^2}{8} R = a_e^n$

- $\vec{a}_{A^*}^t$ hướng vuông góc với AO tại A, có chiều và giá trị chưa xác định.

$$a_{A^*}^t = \varepsilon O_1A^* = 2R\varepsilon = a_e^t$$

Vậy hình 2-45: $\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Trong phương trình véc tơ này hai véc tơ $\vec{a}_e^n$ và $\vec{a}_e^t$ có giá trị chưa được xác định. Để



tìm chúng, chiếu hai vế của bất đẳng thức véc tơ gia tốc trên phương O_1B (từ đó tìm được a_r) và trên phương vuông góc với O_1B (từ đó tìm được $\vec{a}_e^t$) Cụ thể ta có:

$$-a_A \cos 30^\circ = a_e^t - a_c$$

$$-a_A \sin 30^\circ = -a_e^n - a_r$$

Từ đây tính được:

$$a_r = -\frac{3}{8} R\omega_0^2$$

(dấu “-” chỉ chiều đúng là chiều ngược với chiều đã chọn trên hình 2-45)

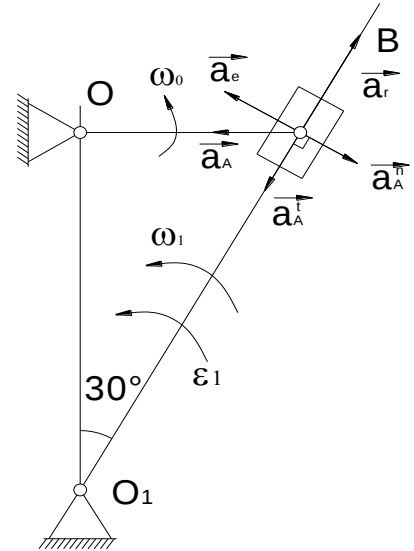
$$a_e^t = -\frac{R\sqrt{3}}{4} \omega_0^2$$

Chiều của $\vec{a}_e^t$ cũng là chiều ngược với chiều trên hình 2-45.

Gia tốc góc $\bar{\varepsilon}_1$ của cần lắc O_1B có giá trị:

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_e^t}{OA^*} = \frac{R\sqrt{3}}{8R} \omega_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2 \text{ rad/s}^2$$

Và có chiều ngược chiều quay kim đồng hồ.

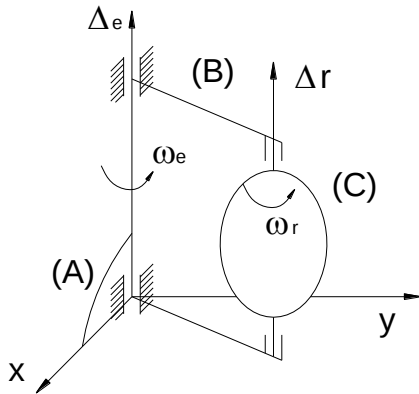


Hình 2-45

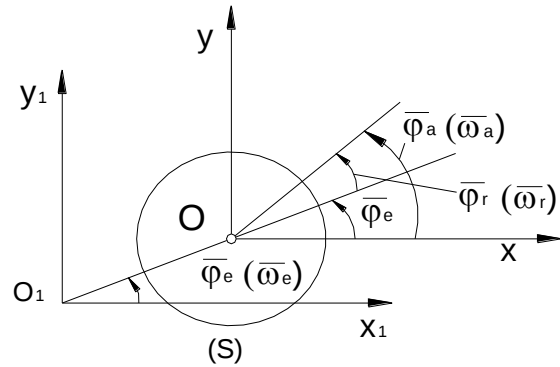
Tại thời điểm khảo sát cần lắc chuyển động nhanh dần vì $\bar{\omega}_1 > 0$ và $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ nên $\bar{\omega}_1 \bar{\varepsilon}_1 > 0$

2.4.2. Tổng hợp chuyển động vật rắn.

Tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song: Xét vật (C) quay đối với khung (B) quanh trục Δr với vận tốc góc ω_r , khung (B) quay đối với giá cố định (A) quanh trục Δ với vận tốc góc ω_e . Xác định chuyển động của vật (C) đối với giá cố định (A) (hình 2-46).



Hình 2-46



Hình 2-47

Chuyển động của vật (C) đối với khung (B) được gọi là chuyển động tương đối. Chuyển động của vật (C) đối với giá cố định (A) được gọi là chuyển động tuyệt đối. Chuyển động của khung (B) đối với giá cố định (A) gọi là chuyển động theo.

Đầu tiên ta nhận xét rằng chuyển động tuyệt đối của vật (C) là chuyển động song phẳng với mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay (ví dụ mặt phẳng Oxy). Do đó thay cho việc khảo sát chuyển động của vật (C) ta khảo sát chuyển động của một hình phẳng S nằm trong mặt phẳng thẳng góc với các trục quay (hình 2-47). Gọi O_1O là khoảng cách hai trục.

Thanh O_1O quay đối với giá cố định với vận tốc góc $\bar{\omega}_e$ (với góc định vị $\bar{\varphi}_e$), còn hình phẳng S quay quanh trục O đối với tay quay O_1O với vận tốc góc $\bar{\omega}_r$ (với góc định vị $\bar{\varphi}_r$).

Vì chuyển động tuyệt đối của hình phẳng S là chuyển động song phẳng nên cần xác định:

- Tâm vận tốc tức thời của hình phẳng.
- Vận tốc góc tuyệt đối $\bar{\omega}_a$ của hình phẳng.

Đầu tiên ta tìm vận tốc góc tuyệt đối $\bar{\omega}_a$ của hình phẳng. Góc định vị của hình phẳng S trong chuyển động tuyệt đối, kí hiệu $\bar{\varphi}_a$ sẽ bằng (hình 2-47):

$$\bar{\varphi}_a = \bar{\varphi}_e + \bar{\varphi}_r \quad (2-65)$$

Do đó:
$$\frac{d\bar{\varphi}_a}{dt} = \frac{d\bar{\varphi}_e}{dt} + \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt}$$

Vậy:
$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r \quad (2-66)$$

Để tìm tâm vận tốc tức thời P của hình phẳng S chúng ta lần lượt xét các trường hợp sau:

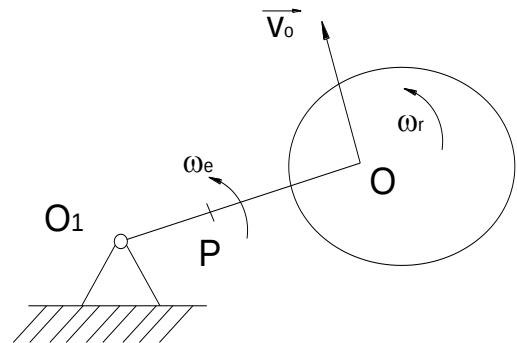
a. Trường hợp chuyển động quay theo và quay tương đối cùng chiều: Ví dụ $\bar{\omega}_e > 0$, $\bar{\omega}_r > 0$. Vậy (hình 2-48):

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r > 0$$

Xét điểm O thuộc hình phẳng S nằm trên tay quay O_1O , quay quanh trục O_1 với vận tốc góc ω_e nên:

$$v_o = \omega_e O_1O$$

Dựa vào quy tắc tìm tâm vận tốc tức thời khi biết vận tốc một điểm ($\vec{v}_0$) và vận tốc góc của hình phẳng ($\bar{\omega}_a$); ta tìm tâm vận tốc tức thời như sau: quay $\vec{v}_0$ quanh O một góc 90° theo chiều quay của $\bar{\omega}_a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với $\vec{v}_0$ ta lấy điểm P:



Hình 2-48

$$PO = \frac{v_0}{\omega_a} = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r} O_1O < O_1O$$

Vậy P là điểm chia trong của đoạn O_1O .

Ngoài ra chúng ta có:

$$PO = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r} O_1O = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r} (O_1P + PO)$$

Từ đây ta tìm được (định chiều dương từ O_1 đến O):

$$\frac{P\bar{O}}{P\bar{O}_1} = -\frac{\omega_e}{\omega_r} \quad (2-67)$$

b. Trường hợp chuyển động quay theo và chuyển động quay tương đối quay ngược chiều: nhau Ví dụ $\bar{\omega}_e > 0$, $\bar{\omega}_r < 0$, $|\bar{\omega}_e| > |\bar{\omega}_r|$.

Áp dụng công thức (2-66) ta tính được (hình 2-49):

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r = \omega_e - \omega_r > 0$$

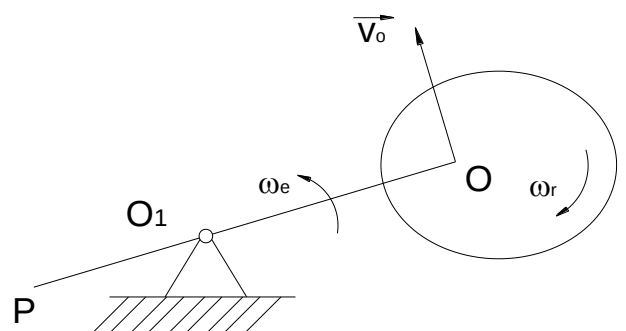
Vậy chuyển động tuyệt đối có chiều quay dương, tức cùng chiều với chuyển động thành phần có vận tốc góc lớn nhất về giá trị.

Tâm vận tốc tức thời trong trường hợp này được xác định như sau:

$$PO = \frac{v_0}{\omega_a} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r} O_1O > O_1O$$

Vậy P nằm ngoài đoạn O_1O và nằm gần trục quay O_1 hơn trục quay O, tức nằm gần trục quay thành phần có vận tốc góc lớn nhất về giá trị. Như vậy ta có:

$$P\bar{O} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r} O_1\bar{O} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r} (O_1\bar{P} + P\bar{O})$$



Hình 2-49

Từ đây ta tìm được:

$$\frac{P\overline{O}}{P\overline{O}_1} = \frac{\omega_e}{\omega_r} \quad (2-68)$$

Các công thức (2-67), (2-68) có thể viết trong cùng một công thức như sau:

$$\frac{P\overline{O}}{P\overline{O}_1} = -\frac{\omega_e}{\omega_r} \quad (2-69)$$

Vậy ta có định lí 2-12.

Định lí 2-12: Tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song của vật rắn, ta được một chuyển động quay có trục quay song song với các trục quay của hai chuyển động quay thành phần, đi qua điểm P là điểm chia đoạn vuông góc giữa hai trục quay theo tỉ số (2-69) với vận tốc góc tính được theo công thức (2-66).

Chú ý: Khi $\overline{\omega}_e = -\overline{\omega}_r$ thì $\overline{\omega}_a = 0$ tức vật chuyển động tịnh tiến.

Ví dụ 2-6: Cho cơ cấu bốn khâu OABO₁. Tay quay OA quay với vận tốc góc ω_1 . Tính vận tốc góc của cần lắc O₁B đối với tay quay OA, từ đó thiết lập tỉ số truyền động giữa hai khâu, hai khâu OA và O₁B được gọi là hai khâu nối giá vì chúng đều nối với giá (hình 2-50).

Giải

Vận tốc góc của cần lắc O₁B đối với tay quay OA là vận tốc góc tương đối của nó khi chọn tay quay OA làm hệ động. Chuyển động của khâu O₁B đối với tay quay OA là chuyển động song phẳng có tâm vận tốc tức thời P₃₁. Chú ý rằng tâm vận tốc tức thời của khâu 1 đối với khâu 3 là P₁₃≡P₃₁.

Tâm vận tốc tức thời của khâu 2 (AB) đối với khâu 4 (OO₁) là P₂₄, còn tâm vận tốc tức thời của khâu 4 đối với khâu 2 là P₄₂≡P₂₄.

Có thể sử dụng các kết quả khảo sát về tổng hợp hai chuyển động quay của vật rắn quanh hai trục song song cho bài toán trên.

Gọi vận tốc góc của khâu 1 (OA) và khâu 3 (O₁B) đối với giá 4 (OO₁) là $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_3$ tương ứng.

Chọn khâu 1 (OA) làm hệ động.

- Chuyển động tương đối của khâu 3 (O₁B) là chuyển động quay quanh trục P₃₁ (trục quay tương đối).

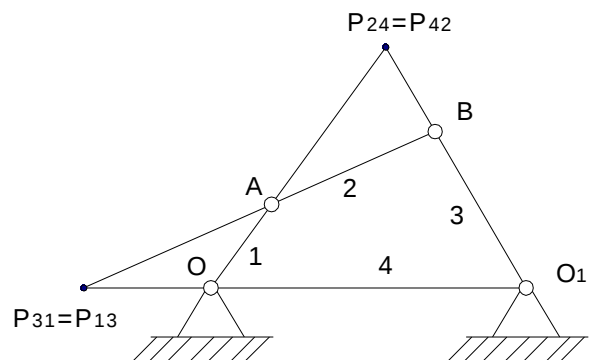
- Chuyển động theo là chuyển động của khâu 1 (OA) quay quanh trục O (trục quay O (trục quay theo)).

- Chuyển động tuyệt đối của khâu 3 (O₁B) là chuyển động quay quanh trục O₁ (trục quay tuyệt đối).

Vậy:

$$\overline{\omega}_e \equiv \overline{\omega}_1 ; \overline{\omega}_a^{(3)} \equiv \overline{\omega}_3 ; \overline{\omega}_r^{(3)} \equiv \overline{\omega}_a^{(3)} - \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_1$$

Trong trường hợp này trục quay tuyệt đối (tức O₁) nằm ngoài đoạn thẳng nối trục quay tương đối (P_B) và trục quay theo nên ta sử dụng công thức (2-69) trong đó P (trục



Hình 2-50

quay tuyệt đối), O_1 (trục quay theo), O (trục quay tương đối) được thay tương ứng bằng O_1, O và P_{13} .

Vậy ta có :

$$\frac{\overline{O_1 P_{13}}}{\overline{O_1 O}} = -\frac{\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_3} - \overline{\omega_1}}$$

Sau một vài phép biến đổi ta nhận được:

$$\frac{\overline{P_{13} O_1}}{\overline{P_{13} O}} = \frac{\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_3}} = i_{13} \quad (a)$$

Đại lượng i_{13} được gọi là tỉ số truyền giữa khâu 1 và khâu 3.

Công thức 3 cho ta định lí 2-13

Định lí 2-13: (Định lí Vilit) Trong cơ cấu bốn khâu, đường truyền (tức đường AB) chia đường tâm (tức đường $O_1 O$) thành hai đoạn tỉ lệ nghịch với vận tốc góc của hai khâu giá.

2.5. Động học cơ cấu.

2.5.1. Một số khái niệm.

Cơ cấu là tập hợp các vật có chuyển động xác định, dùng để truyền động hoặc biến đổi chuyển động. Mỗi vật trong cơ cấu được gọi là khâu. Các khâu được nối với nhau bằng các khớp. Khi miền tiếp xúc giữa các khâu là một mặt thì khớp được gọi là khớp sơ cấp, còn khi miền tiếp xúc là một đường hay một điểm thì khớp được gọi là khớp cao cấp. Khâu cố định được gọi là giá. Khâu nối giá có chuyển động cho trước được gọi là khâu dẫn, còn các khâu nối giá khác được gọi là khâu bị dẫn.

2.5.2. Cơ cấu khâu bản lề phẳng.

2.5.2.1. Định nghĩa.

Cơ cấu khâu bản lề phẳng là một cơ cấu phẳng gồm bốn khâu nối với nhau bằng các khớp quay. Khâu 4 gọi là giá, các khâu 1 và 3 nối giá được gọi là tay quay (nếu nó quay được toàn vòng) hay cần lắc (nếu nó không quay được toàn vòng) (hình 2-51).

Để xác định vị trí của cơ cấu bốn khâu chỉ cần một thông số định vị (góc định vị của khâu 1 hoặc khâu 3). Cơ cấu khâu bản lề phẳng có một bậc tự do.

2.5.2.2. Tỉ số truyền.

Kí hiệu i_{13} .

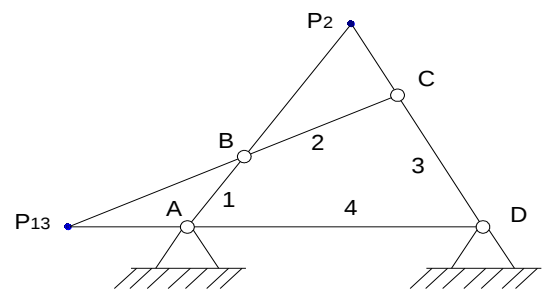
$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$$

Theo định lí Vilit (Định lí 2-13) ta có:

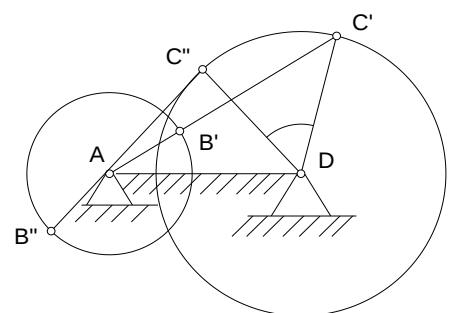
$$i_{13} = \frac{\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_3}} = \frac{P_{13} \overline{D}}{P_{13} \overline{A}}$$

Nhận xét:

- Tỉ số truyền i_{13} là một đại lượng biến thiên, nó phụ thuộc vào góc định vị khâu dẫn: $i_{13} = i_{13}(\varphi_1)$. Nói



Hình 2-51



Hình 2-52

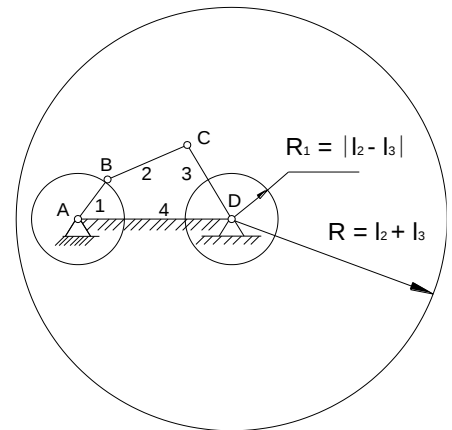
khác đi nếu khâu dẫn quay đều thì khâu bị dẫn quay không đều.

- Khi P_{13} là điểm chia ngoài của đoạn AD thì $i_{13} > 0$, hai khâu dẫn và bị dẫn quay cùng chiều. Khi P_{13} là điểm chia trong của đoạn AD thì $i_{13} < 0$, hai khâu dẫn và bị dẫn quay ngược chiều.

- Tại thời điểm khi tay quay và thanh truyền duỗi thẳng hoặc gấp vào nhau ($P_{13} \equiv A$) thì $i_{13} = \infty$ nên $\omega = 0$, tức tại thời điểm này thanh lắc đổi chiều quay. Lúc đó vị trí DC' và DC'' được gọi là vị trí biên của cần lắc (hình 2-52).

2.5.2.3. Điều kiện quay toàn vòng.

Điểm B thuộc khâu 1 (B_1) chuyển động trên vòng tròn tâm A bán kính l_1 . Điểm B thuộc khâu 2 (B_2) sẽ chuyển động trong miền được giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm D, có các bán kính bằng $(l_2 + l_3)$ và $|l_3 - l_2|$. Để khâu 1 quay được toàn vòng thì tại mọi thời điểm các điểm B_1 và B_2 phải trùng nhau ($B_1 \equiv B_2$), tức là đường tròn tâm A, bán kính l_1 nằm trong miền giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm D, có các bán kính tương ứng bằng $(l_2 + l_3)$ và $|l_3 - l_2|$.



Hình 2-53

Như vậy các điều kiện quay toàn vòng sẽ là:

$$l_1 + l_4 < l_2 + l_3$$

$$|l_1 - l_4| > |l_3 - l_2|$$

Quy tắc Graxnop:

- Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất nhỏ hơn hoặc bằng tổng chiều dài hai khâu còn lại thì:

+ Khi giá kề với khâu ngắn nhất thì khâu ngắn nhất là tay quay, còn khâu đối diện là cần lắc.

+ Khi giá là khâu ngắn nhất thì cả hai khâu nối giá đều là tay quay.

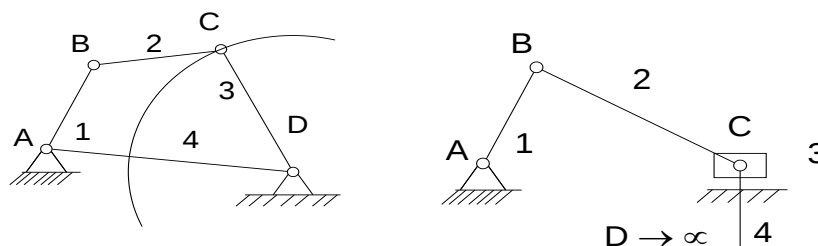
+ Khi giá đối diện với khâu ngắn nhất thì cơ cấu có hai thanh lắc.

- Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất lớn hơn tổng chiều dài của hai khâu còn lại thì khâu nào làm giá cơ cấu cũng có hai cần lắc.

2.5.3. Các biến thể của cơ cấu bốn khâu.

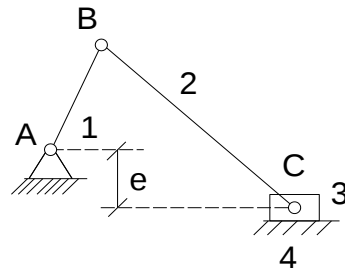
2.5.3.1. Cơ cấu tay quay – con trượt.

Xét cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng với tay quay 1 và thanh lắc 3. Giả sử $l_3 \rightarrow \infty$ thì quỹ đạo điểm C biến thành đường thẳng và chuyển động lắc của khâu 3 biến thành chuyển động tịnh tiến qua lại của con trượt C. Cơ cấu này được gọi là cơ cấu tay quay – con trượt (hình 2-54).

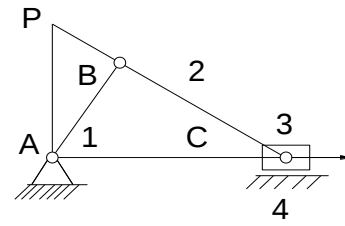


Hình 2-54

Khi $e \neq 0$ thì ta có cơ cấu tay quay – con trượt lệch tâm (hình 2-55), khi $e=0$ ta có cơ cấu tay quay – con trượt chính tâm (hình 2-56).



Hình 2-55



Hình 2-56

Tỉ số truyền: Theo định lí Vilit (định lí 2-13) ta có:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{PD}{PA}$$

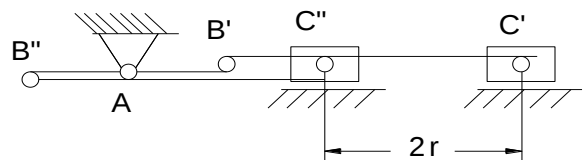
Từ đó:
$$\omega_1 = \frac{PD}{PA} \omega_3 = \frac{v_{P_3}}{PA}$$

v_{P_3} là vận tốc điểm P_3 thuộc khâu 3. Vì khâu 3 chuyển động tịnh tiến nên $v_{P_3} = v_C$ (v_C là vận tốc của con trượt C). Chú ý rằng khi cơ cấu bốn khâu bản lề suy biến thành cơ cấu tay quay – con trượt thì đường thẳng AD suy biến thành đường thẳng vuông góc với trục Ax nằm ngang và do đó đường thẳng AP cũng vuông góc với trục Ax (hình 2-56).

Vậy tỉ số truyền sẽ bằng:
$$i_{13} = \frac{v_C}{\omega_1} = PA$$

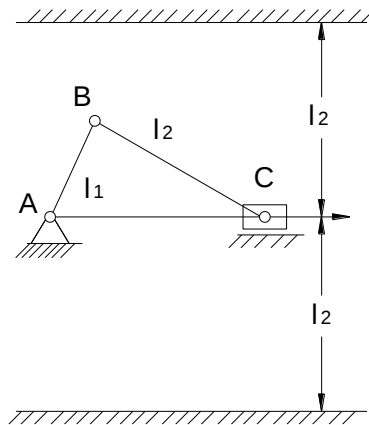
Tỉ số truyền phụ thuộc vào vị trí của điểm P trên đường thẳng đứng qua A, nên dù tay quay quay đều thì con trượt C chuyển động tịnh tiến qua lại theo phương ngang không đều hoặc ngược lại, khi con trượt chuyển động đều thì tay quay quay không đều.

Khi tay quay và thanh truyền đuổi thẳng hoặc chập nhau thì $P \equiv B$ nên $PB=0$. Từ đó suy ra $v_C=0$. Ứng với các vị trí này con trượt C dừng lại và đổi chiều chuyển động. Các vị trí C' và C'' là hai vị trí biên của con trượt C, còn đoạn C'C'' gọi là hành trình của con trượt (hình 2-57).

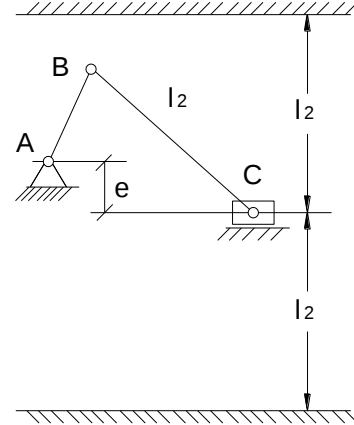


Hình 2-57

Điều kiện quay toàn vòng: Điểm B_1 trên khâu 1 chạy trên đường tròn tâm A, bán kính l_1 , còn điểm B_2 trên khâu 2 chuyển động trong dây được giới hạn bởi hai đường thẳng song song với trục ngang Ax có chiều rộng $2l_2$. Đối với cơ cấu tay quay – con trượt chính tâm thì điều kiện để tay quay AB quay toàn vòng sẽ là: $l_1 < l_2$ (hình 2-58). Còn đối với cơ cấu tay quay – con trượt lệch tâm thì điều kiện quay toàn vòng của tay quay sẽ là (hình 2-59): $l_1 + e < l_2$.



Hình 2-58



Hình 2-59

2.5.3.1. Cơ cấu culit.

Từ cơ cấu tay quay – con trượt nếu đổi khâu 1 (hoặc khâu 2) làm giá thì ta được cơ cấu Culit (hình 2-60).

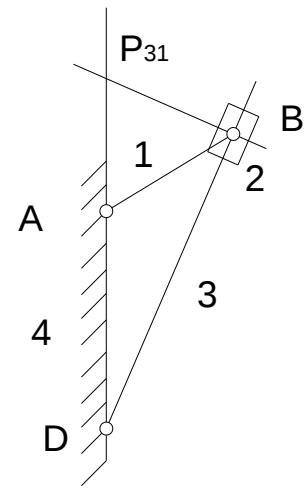
Tỉ số truyền: Có thể áp dụng trực tiếp định lí Vilit để tìm tỉ số truyền. Muốn vậy ta xem cơ cấu culit như là biến thể của cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng trong đó khâu 2 biến thành con trượt. Tâm vận tốc tức thời của khâu 3 đối với khâu 1 (P_{31}) là giao điểm của đường giá AD và đường thẳng vuông góc với DB vẽ qua B.

$$\text{Do đó: } i_{13} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3} = \frac{P_{31}D}{P_{31}A}$$

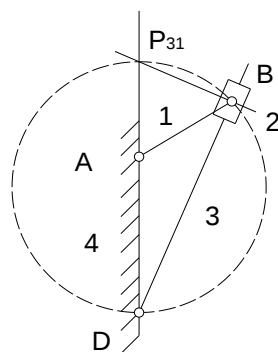
Tỉ số truyền i_{13} biến thiên theo vị trí của P_{31} trên đường thẳng AD. Khâu 1 dù quay đều thì khâu 3 vẫn quay không đều và ngược lại.

Khi $l_1=l_4$ thì $AD=AP_{31}$ nên P_{31} là điểm duy nhất ở trên đường tròn tâm A bán kính l_1 (hình 2-61). Trong trường hợp này

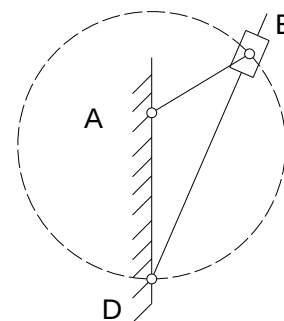
$$\text{ta có: } i_{13} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3} = 2.$$



Hình 2-60



Hình 2-61

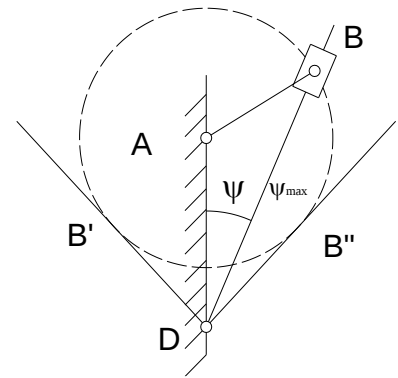


Hình 2-62

Điều kiện quay toàn vòng: Khâu 1 luôn luôn quay được toàn vòng vì B_1 chuyển động trên đường tròn tâm A bán kính l_1 , còn B_2 (điểm B trên con trượt 2) chuyển động trong toàn mặt phẳng chứa mọi vị trí của B_1 .

Đối với khâu 3 điểm B_3 thuộc khâu 3 đi qua D. Để cho culit BD quay toàn vòng thì mọi đường thẳng DB_3 phải cắt đường tròn B_1 (hình 2-62), tức là: $l_1 \geq l_4$

Nếu $l_1 < l_4$ thì culit không quay toàn vòng được (hình 2-63), nó có hai vị trí tiếp với đường tròn B_1 tại hai điểm B' và B'' . Góc $\Psi = \angle B'DB''$ được gọi là góc hành trình của culit (hình 2-63).



Hình 2-63

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ Đề các?
2. Khảo sát chuyển động thẳng đều và biến đổi đều?
3. Khảo sát chuyển động tròn đều và biến đổi đều?
4. Định nghĩa về chuyển động tịnh tiến của vật? Tính chất của chuyển động tịnh tiến của vật?
5. Định nghĩa về chuyển động quay của vật quanh một trục cố định?
6. Công thức tính vận tốc góc và gia tốc góc của một điểm thuộc vật cách trục một khoảng h ?
7. Định nghĩa về chuyển động song phẳng của vật rắn, các yếu tố động học của vật chuyển động song phẳng: vận tốc góc và gia tốc của cực, vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng quay quanh cực.
8. Công thức tính vận tốc một điểm nhờ tâm vận tốc – Các quy tắc tìm vận tốc góc?
9. Định lý về hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc vật rắn?
10. Công thức liên hệ gia tốc giữa hai điểm?
11. Định nghĩa chuyển động tuyệt đối, tương đối, chuyển động theo? Cho ví dụ?
12. Bài toán hợp vận tốc trong tổng hợp chuyển động điểm?
13. Bài toán tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song?

Chương 3

ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học là một phần của cơ học nghiên cứu các quy luật chuyển động của các vật thể dưới tác dụng của các lực. Lý thuyết động lực học được xây dựng trên những định luật cơ bản động lực học. Chúng là kết quả các thí nghiệm và quan sát, đã được kiểm nghiệm qua thực tiễn.

3.1. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN.

3.1.1. Các khái niệm.

3.1.1.1. Các mô hình của vật thể.

a. *Chất điểm là một điểm hình học có mang khối lượng.* Chất điểm là mô hình của vật thể mà kích thước của nó có thể bỏ qua được do quá nhỏ so với các vật thể khác hoặc không đóng vai trò quan trọng trong chuyển động được khảo sát. Ví dụ, khi xác định tầm xa của viên đạn hoặc khi khảo sát chuyển động các vật tịnh tiến có thể xem chúng là những chất điểm. Có chất điểm tự do và chất điểm điểm không tự do.

Chất điểm tự do là chất điểm mà tại thời điểm khảo sát các di chuyển (vô cùng bé) của nó từ vị trí đang xét theo bất kỳ phương nào cũng không bị cản trở.

Chất điểm không tự do (còn gọi là chất điểm chịu liên kết) là chất điểm mà tại thời điểm khảo sát các di chuyển (vô cùng bé) của nó từ vị trí đang xét bị cản trở dù chỉ theo một phương nào đó. Các điều kiện ràng buộc về vị trí và vận tốc đặt lên chuyển động của điểm được gọi là các liên kết. Ví dụ, đối với con lắc toán học (hình 3-1) điều kiện ràng buộc là điểm M chỉ có thể chuyển động trên biên hoặc bên trong mặt tròn có bán kính l (độ dài của con lắc toán học). Phương trình liên kết sẽ là:

$$x^2 + y^2 - l^2 \leq 0 \quad (3-1)$$

Chất điểm không tự do có thể thay thế bằng chất điểm tự do (định luật thay thế liên kết- chương 1) do giải phóng liên kết và đặt thêm những phản lực liên kết.

b. *Cơ hệ là một tập hợp hữu hạn hoặc vô hạn các chất điểm*, trong đó chuyển động của một chất điểm bất kì phụ thuộc vào chuyển động của các chất điểm còn lại, tức là chuyển động của các chất điểm phụ thuộc vào nhau. Nói khác đi, giữa các chất điểm phụ thuộc lẫn nhau. Nói khác đi giữa các chất điểm của cơ hệ tồn tại các tương tác cơ học. Tùy thuộc vào bản chất của các tương tác cơ học giữa các chất điểm, cơ hệ được phân thành cơ hệ tự do và không tự do.

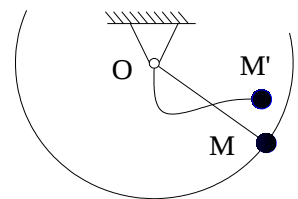
Cơ hệ tự do gồm các chất điểm tự do. Cơ hệ không tự do là một tập hợp các chất điểm trong đó có ít nhất một chất điểm không tự do. Cơ cấu máy là một cơ hệ không tự do. Vật rắn tuyệt đối cũng là một cơ hệ không tự do.

Cơ hệ không tự do có thể được khảo sát như cơ hệ tự do nhờ định luật thay thế liên kết hoặc khảo sát nó trong điều kiện bảo toàn các liên kết đặt lên cơ hệ (động lực học cơ hệ không tự do).

3.1.1.2. Lực.

Khái niệm lực đã được định nghĩa trong phần tĩnh học. Trong tĩnh học chỉ đề cập đến các lực hằng. Trong động lực học, lực nói chung là các đại lượng biến đổi (cả về độ lớn và hướng) hàm theo thời gian, vị trí và vận tốc:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \quad (3-2)$$



Hình 3-1

3.1.1.3. Các đặc trưng của lực tác dụng.

a. *Xung lượng của lực*, gọi tắt là *xung lực*, là đại lượng dùng để đánh giá tác dụng của lực theo thời gian:

Xung lực nguyên tố, kí hiệu $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \quad (3-3)$$

Xung lực hữu hạn, kí hiệu $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (3-4)$$

Xung lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$:

$$\vec{S} = \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \right) dt \quad (3-5)$$

Đơn vị của xung lực được đo bằng Niuton giây, kí hiệu (N.s).

b. *Công và công suất của lực*.

- Công của lực là đại lượng dùng để đánh giá tác dụng của lực trong di chuyển.

Công nguyên tố, kí hiệu dA , của lực $\vec{F}$ trong di chuyển vô cùng bé là một đại lượng vô hướng:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3-6)$$

Trong đó $\vec{r}$ là véc-tơ định vị của điểm đặt của lực;

$d\vec{r}$ biểu diễn lượng di chuyển vô cùng bé của điểm đặt của lực; F_x, F_y, F_z là hình chiếu của lực trên ba trục tọa độ vuông góc; dx, dy, dz là ba thành phần của véc-tơ di chuyển vô cùng bé $d\vec{r}$ trên ba trục tọa độ (hình 3-2).

Biểu thức công nguyên tố cũng có thể được viết trong dạng sau:

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z})dt = \vec{F}_t d\vec{s} = F \cos \alpha ds \quad (3-7)$$

Trong đó, $\vec{F}_t$ là hình chiếu của lực lên phương tiếp tuyến của quỹ đạo điểm đặt; α là góc giữa lực và phương tiếp tuyến quỹ đạo.

Công hữu hạn của lực là công do lực sinh ra khi điểm đặt của lực di chuyển một đoạn (hữu hạn), kí hiệu A .

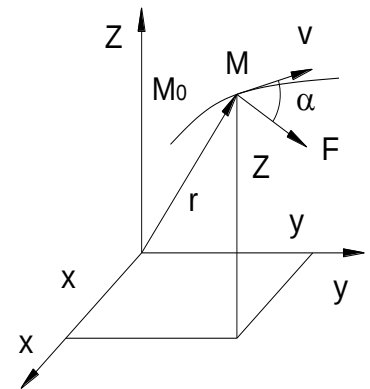
$$A = \int_{M_0 \vec{M}} \vec{F}d\vec{r} = \int_{M_0 \vec{M}} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{M_0 \vec{M}} F \cos \alpha ds \quad (3-8)$$

Đơn vị công của lực là Niu tơn mét, kí hiệu (Nm), còn gọi là Jun (J).

- Công suất của lực là công của lực sinh ra trong một đơn vị thời gian, kí hiệu W .

$$W = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = \vec{F}_t \vec{v}_t \quad (3-9)$$

Trong đó $\vec{F}_t, \vec{v}_t$ lần lượt là hình chiếu của lực và vận tốc của điểm đặt lực lên phương tiếp tuyến quỹ đạo (cùng phương vận tốc).



Hình 3-2

Đơn vị của công suất là Niu ton mét/giây, kí hiệu Nm/s, nó còn được gọi là Watt (W) và các bội số của nó như kilowatt (kW), ...

3.1.1.4. Hệ quy chiếu quán tính.

Trong động lực học chuyển động được khảo sát đối với hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu mà trong đó định luật quán tính của Niu ton được nghiệm đúng. Trong kĩ thuật hệ quy chiếu gắn liền với Trái Đất được xem là hệ quy chiếu quán tính (hệ quy chiếu gần đúng).

3.1.2. Các định luật cơ bản của động lực học.

Định luật 1 (Định luật quán tính): *Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào thì đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.*

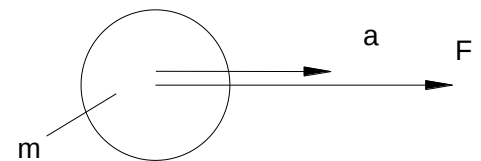
Trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là trạng thái quán tính của nó.

Như vậy, theo định luật này nếu không có lực tác dụng lên chất điểm (chất điểm như vậy được gọi là chất điểm cô lập) thì nó có trạng thái quán tính.

Định luật 2 (Định luật cơ bản của động lực học): *Trong hệ quy chiếu quán tính, dưới tác dụng của lực chất điểm chuyển động với gia tốc cùng hướng với lực và có trị số tỉ lệ với cường độ của lực (hình 3-3).*

$$\text{Vậy} \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad (3-10)$$

Trong đó hệ số tỉ lệ m có giá trị không đổi, nó là số đo quán tính của chất điểm được gọi là khối lượng chất điểm.



Hình 3-3

Đẳng thức (3-10) được gọi là định luật cơ bản của động lực học.

Nếu $\vec{F} = 0$ thì $\vec{a} = 0$ (bao gồm cả trường hợp $\vec{v} = 0$) tức chất điểm có trạng thái quán tính.

Khi chất điểm rơi tự do trong trọng trường, ta có:

$$P = mg \quad (3-11)$$

Đó là quan hệ giữa khối lượng và trọng lượng chất điểm, trong đó g là gia tốc trọng trường, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Để khảo sát bài toán động lực học ngoài hai định luật nêu trên ta còn sử dụng các định luật đã nêu trong tĩnh học: định luật tác dụng và phản tác dụng, định luật hợp lực theo quy tắc hình bình hành, định luật thay thế liên kết.

3.1.3. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm.

3.1.3.1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng véc tơ: Như đã biết trong hệ quy chiếu quán tính phương trình cơ bản của động lực học có dạng (3-10). Nếu gọi $\vec{r}$ là véc-tơ định vị của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính ta có:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (3-12)$$

Phương trình (3-12) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng véc tơ.

3.1.3.2. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ đề các: Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc gắn vào hệ quy chiếu quán tính. Khi chiếu hai vế của đẳng thức véc-tơ (3-10) lên các trục tọa độ ta được:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Đó là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ Đề các.

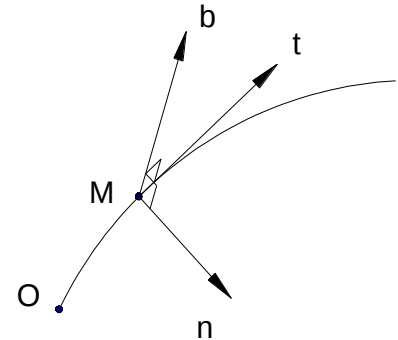
Khi chất điểm chuyển động trong mặt phẳng hoặc theo đường thẳng thì số phương trình giảm xuống còn tương ứng hai hoặc một.

3.1.3.3. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ tự nhiên.

Khi chiếu hai vế của đẳng thức véc-tơ (3-10) lên các trục tọa độ tự nhiên và dựa vào kết quả trong phần động học ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

Trong đó s , v tương ứng là tọa độ cong và giá trị vận tốc của điểm, ρ là bán kính cong quỹ đạo; F_t , F_n , F_b lần lượt là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên các trục tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến.



Hình 3-4

Hệ phương trình (3-14) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của điểm dạng tọa độ tự nhiên.

3.1.3.4. Hai bài toán cơ bản của động lực học chất điểm.

Bài toán thứ nhất – Bài toán thuận: Cho biết chuyển động của chất điểm, hãy xác định lực tác dụng lên chất điểm.

Trong trường hợp biết chuyển động chất điểm không phải qua gia tốc mà qua luật chuyển động hoặc vận tốc của nó thì đầu tiên ta phải tìm gia tốc của chất điểm nhờ các công thức đã thiết lập ở phần động học (chương 2), sau đó áp dụng phương trình cơ bản của động lực học.

Ví dụ 3-1: Kéo một vật nặng có trọng lượng P đi lên nhanh dần với gia tốc a . Hãy xác định sức căng của dây cáp (hình 3-5).

Giải

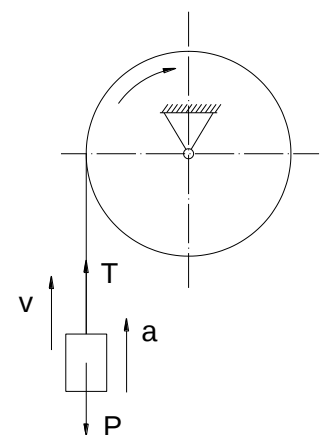
Khảo sát vật nặng, nó được xem như là một chất điểm chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ hướng xuống, lực kéo $\vec{T}$ của dây cáp hướng lên.

Viết phương trình cơ bản của động lực học chất điểm :

$$\frac{P}{g} \vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

Khi chiếu hai vế của đẳng thức trên lên trục thẳng đứng hướng lên, ta có:

$$\frac{P}{g} a = T + P$$



Hình 3-5

$$\text{Suy ra: } T = P \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Khi vật đi lên chậm dần hoặc đi xuống nhanh dần thì gia tốc sẽ hướng xuống và sức căng trong dây bằng:

$$T = P \left(1 - \frac{a}{g} \right)$$

Khi vật đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều (trạng thái quán tính) thì $\vec{a} = 0$ và sức căng dây $T=P$.

Bài toán thứ hai – Bài toán ngược: Cho biết lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu). Hãy xác định chuyển động của chất điểm.

Như đã biết từ phương trình cơ bản của động lực học chất điểm, gia tốc có thể được xác định từ phương trình vi phân chuyển động chất điểm. Do đó để tìm chuyển động của chất điểm cần giải tích phân phương trình vi phân chuyển động. Nếu tìm được các tích phân, chúng sẽ chứa các hằng số tích phân, thì chỉ biết lớp chuyển động chứ chưa biết dạng chuyển động cụ thể. Muốn tìm dạng chuyển động cụ thể cần phải xác định các hằng số tích phân nhờ các điều kiện đầu (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu).

Ví dụ 3-2: Một quả cầu khối lượng m rơi tự do từ điểm O , không vận tốc ban đầu dưới tác dụng của trọng lực, trong môi trường không cản. Tìm quy luật chuyển động của quả cầu (hình 3-6).

Giải

Xem quả cầu như một chất điểm chuyển động theo phương thẳng đứng xuống. Phương trình vi phân chuyển động của quả cầu sẽ là:

$$m\ddot{x} = P = mg \Rightarrow \ddot{x} = g$$

Khi tích phân lần lượt ta có:

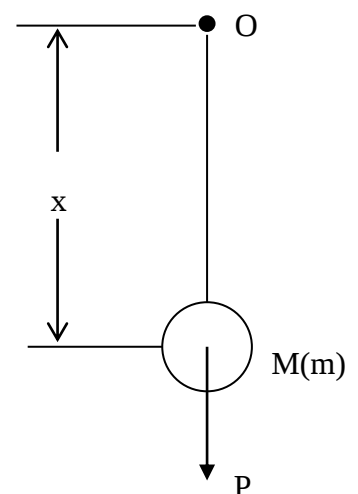
$$\dot{x} = gt + C_1 ; \quad x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Sử dụng điều kiện đầu $x(0)=0 ; \dot{x}(0) = v(0) = 0$

Ta tìm được: $C_1=0, C_2=0$

Vậy phương trình chuyển động của quả cầu sẽ là: $x = \frac{1}{2}gt^2$

tức trong môi trường không cản quả cầu rơi nhanh dần đều với gia tốc $a=g=9,8 \text{ m/s}^2$.



Hình 3-6

3.2. ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ.

3.2.1. Các khái niệm.

3.2.1.1. Cơ hệ tự do và cơ hệ chịu liên kết.

Cơ hệ tự do là một tập hợp các chất điểm mà tương tác cơ học giữa chúng được biểu hiện chỉ thuần túy qua lực tác dụng. Về mặt động học đó là một tập hợp các chất điểm tự do, là những chất điểm mà di chuyển (vô cùng bé) của chúng từ vị trí đang xét theo bất kì phương nào cũng không bị cản trở, ví dụ: Thái dương hệ là một cơ hệ tự do.

Cơ hệ không tự do, còn được gọi là cơ hệ chịu liên kết, là một tập hợp các chất điểm mà ngoài tương tác lực, vị trí và vận tốc của chúng còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước, được gọi là những liên kết. Cơ cấu máy là một ví dụ về cơ hệ chịu liên kết. Vật rắn tuyệt đối cũng là một cơ hệ chịu liên kết.

Nếu các điều kiện ràng buộc được biểu thị bằng các phương trình chỉ chứa các tọa độ các chất điểm thì các liên kết đặt lên cơ hệ được gọi là liên kết hình học, giữ và dừng.

3.2.1.2. Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ.

Di chuyển của khả dĩ.

Các liên kết đặt lên cơ hệ đã hạn chế một số khả năng di chuyển của cơ hệ. Tập hợp các khả năng di chuyển còn lại (các di chuyển vô cùng bé) mà cơ hệ còn khả năng thực hiện được gọi là những di chuyển khả dĩ. Ví dụ, xét một viên bi nằm trong ống thẳng có đường kính tiết diện bằng đường kính của viên bi. Viên bi chỉ có một khả năng di chuyển dọc ống sang phải hoặc sang trái từ vị trí đang xét, các khả năng di chuyển khác đều bị tước bỏ, chẳng hạn như khả năng di chuyển theo phương pháp tuyến thành ống. Vậy, di chuyển khả dĩ của cơ hệ là một tập hợp các di chuyển vô cùng bé của các điểm thuộc cơ hệ từ vị trí đang xét sang một vị trí lân cận phù hợp với các liên kết đang xét. Trong trường hợp cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ và dừng thì di chuyển thật trùng với một trong tập hợp các di chuyển khả dĩ.

Số bậc tự do của cơ hệ: Các di chuyển khả dĩ của cơ hệ không độc lập đối với nhau.

Ví dụ: Viên bi đặt trong ống tuy có hai di chuyển khả dĩ (sang phải hoặc sang trái) nhưng chỉ có một di chuyển khả dĩ là độc lập (ví dụ, di chuyển khả dĩ sang bên trái) còn di chuyển khả dĩ kia được suy ra từ di chuyển khả dĩ đầu bằng cách nhân với hệ số (-1). Nói khác đi số di chuyển khả dĩ độc lập của viên bi nằm trong ống bằng 1.

Số bậc tự do của cơ hệ được kí hiệu là k , là số tối đa các di chuyển khả dĩ độc lập tuyến tính của cơ hệ.

3.2.1.3. Tọa độ suy rộng cơ hệ.

Tập hợp các thông số đủ để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được gọi là các tọa độ suy rộng của cơ hệ, kí hiệu $q_1, q_2, \dots, q_n$. Các tọa độ suy rộng có thể là các tọa độ Đề các của chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là góc quay của vật rắn, ... nên thứ nguyên của chúng có thể là độ dài và cũng có thể không là độ dài.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Đề các của chất điểm của cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng.

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_k(q_1 + q_2 + \dots + q_m) \\ y_k &= y_k(q_1 + q_2 + \dots + q_m) \\ \dots \\ z_k &= z_k(q_1 + q_2 + \dots + q_m) \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1 + q_2 + \dots + q_m) \quad (3-15)$$

Nếu các tọa độ suy rộng là độc lập ta có tọa độ suy rộng đủ: $q_1, q_2, \dots, q_n$. Trường hợp ngược lại ta có tọa độ suy rộng thừa: $q_1, q_2, \dots, q_m$ ($m > n$)

Đã chứng minh được rằng đối với cơ hệ chịu liên kết hình học, số tọa độ suy rộng đủ bằng số bậc tự do.

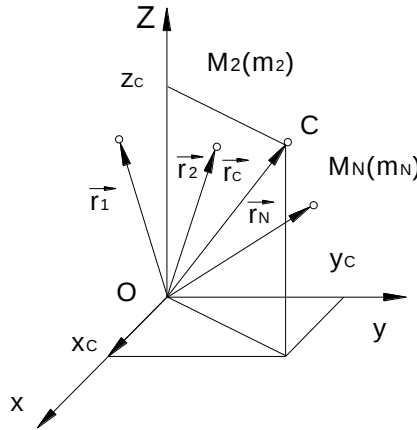
Ví dụ, trong trường hợp vật rắn chuyển động tịnh tiến thì các tọa độ suy rộng đủ, có thể chọn là ba tọa độ Đề các của một chất điểm bất kì thuộc vật. Trong trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định thì tọa độ suy rộng có thể chọn là góc định vị φ của vật quay.

Còn trong trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng các tọa độ suy rộng có thể chọn là các thông số định vị hình phẳng (x_0, y_0, φ).

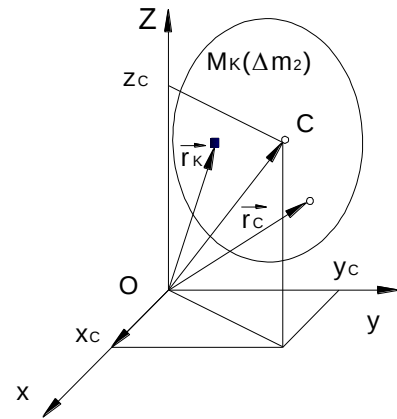
3.2.1.4. Các đặc trưng hình học khối của vật rắn.

a. Khối tâm của cơ hệ và vật rắn.

- Khối tâm của cơ hệ: Xét một cơ hệ gồm N chất điểm $M_k (k=1, 2, \dots, N)$, có khối lượng m_k , véc-tơ định vị $\vec{r}_k$. Điểm hình học C được gọi là khối tâm cơ hệ nếu vị trí của nó được xác định theo công thức sau, (hình 3-7a):



Hình 3-7a



Hình 3-7b

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad (3-16)$$

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^N x_k m_k}{\sum_{k=1}^N m_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^N y_k m_k}{\sum_{k=1}^N m_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^N z_k m_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad (3-16')$$

- Khối tâm của vật rắn: Xét một vật rắn và chia nó thành nhiều phần tử nhỏ M_k (số phần tử tiến đến vô hạn), có khối lượng m_k , véc-tơ định vị $\vec{r}_k$.

Điểm hình học C mà vị trí của nó được xác định theo công thức:

$$\vec{r}_c = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta m_k \vec{r}_k}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k} = \frac{1}{M} \int_{(V)} \vec{r} dm \quad (3-17)$$

Được gọi là khối tâm của vật rắn (hình 3-7b).

Trong đó $M = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k$ - Khối lượng của vật rắn.

Từ đó ta nhận được các công thức xác định khối tâm của vật rắn:

$$x_c = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M} \int_{(V)} x dm$$

$$y_c = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N y_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M} \int_{(V)} y dm \quad (3-17')$$

$$z_c = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N z_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M} \int_{(V)} z dm$$

Trong trường hợp vật rắn nằm gần Trái Đất thì khối tâm trùng trọng tâm (là điểm đặt của hợp lực của hệ trọng lực do Trái Đất tác dụng lên vật rắn).

Nếu vật là một khối đồng chất có thể tích V và khối lượng riêng (khối lượng của một đơn vị thể tích) là ρ thì $M = \rho V$; $dm = \rho dV$. Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{r} dV \\ x_c &= \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV \end{aligned} \quad (3-18)$$

Đặc biệt đối với một tấm phẳng đồng chất có tiết diện F thì:

$$x_c = \frac{1}{F} \iint_{(F)} x dF = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{1}{F} \iint_{(F)} y dF = \frac{S_x}{F} \quad (3-19)$$

$$S_x = \iint_{(F)} y dF; \quad S_y = \iint_{(F)} x dF \quad (3-20)$$

Được gọi là mô men tĩnh của tiết diện F đối với trục x và trục y tương ứng. Các định lý về khối tâm (trọng tâm).

Định lý 3-1: Nếu vật rắn đồng chất có tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng thì khối tâm (trọng tâm) của nó nằm tại tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng.

Định lý 3-2: Nếu vật rắn gồm các phần mà khối tâm (trọng tâm) của các phần đó nằm trên một đường thẳng (mặt phẳng) thì khối tâm (trọng tâm) của vật cũng nằm trên đường thẳng (mặt phẳng) đó.

Các định lý này được chứng minh bằng cách suy trực tiếp từ định nghĩa.

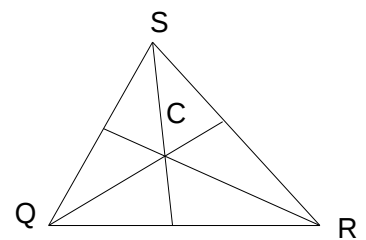
Áp dụng các định lý trên ta tìm ngay được:

- Khối tâm (trọng tâm) của một thanh thẳng đồng chất là điểm giữa của thanh.

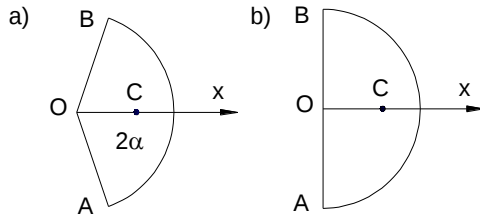
- Khối tâm (trọng tâm) của các hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, khối hộp chữ nhật, khối lập phương đồng chất là tâm của chúng.

- Khối tâm (trọng tâm) của tam giác đồng chất là giao điểm các trung tuyến (hình 3-8).

- Khối tâm (trọng tâm) của cung tròn đồng chất AB , có bán kính R và góc tại tâm $AOB = 2\alpha$ được tính theo công thức (hình 3-9a):



Hình 3-8



Hình 3-9

$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (3-21)$$

Nếu cung AB là nửa đường tròn ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), thì khối tâm (trọng tâm) tính theo công thức (hình 3-9b):

$$x_c = \frac{2R}{\pi} \quad (3-22)$$

- Khối tâm (trọng tâm) của một quạt tròn đồng chất AOB tâm O, có bán kính R và góc tại tâm $\angle AOB = 2\alpha$ được tính theo công thức (hình 3-10a)

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3} \quad (3-23)$$

Nếu quạt AOB là nửa mặt tròn ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), thì khối tâm (trọng tâm) tính theo công thức (hình 3-10b):

$$x_c = \frac{4R}{3\pi} \quad (3-24)$$

- Khối tâm (trọng tâm) của vật ghép (xem định lý 3-3).

Định lý 3-3: Nếu tấm phẳng đồng chất được ghép từ m phần, mỗi phần có diện tích F_i , mô men tĩnh đối với các trục x và y tương ứng là S_{xi} , S_{yi} và khối tâm (trọng tâm) C có tọa độ:

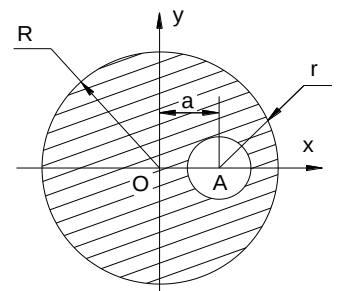
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^m S_{yi}}{\sum_{i=1}^m F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^m S_{xi}}{\sum_{i=1}^m F_i} \quad (3-25)$$

Ví dụ 3-3: Tìm khối tâm (trọng tâm) của tấm tròn đồng chất tâm O, bán kính R, bị khuyết mảnh tròn tâm A bán kính r, biết $OA = a < R$; $a + r < R$ (hình 3-11).

Giải

Xem tấm bị khuyết là kết quả của việc ghép tấm tròn nguyên có khối tâm (trọng tâm) tại $O(0,0)$ diện tích $F_1 = \pi R^2$ với mảnh tròn có khối tâm (trọng tâm) $A(a,0)$ diện tích âm $F_2 = -\pi r^2$.

Do tấm có trục Ox đối xứng nên khối tâm (trọng tâm) nằm trên trục này ($y_c = 0$), còn:



Hình 3-11

$$x_C = \frac{Sy_1 + Sy_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2} = \frac{\pi R^2 0 - \pi r^2 a}{\pi R^2 - \pi r^2}$$

Dấu “-” chứng tỏ C nằm bên trái tâm O.

b. Mô men quán tính của vật rắn.

- Các định nghĩa: Mô men quán tính của vật rắn đối với trục z, kí hiệu I_z là đại lượng vô hướng được xác định theo công thức (3-21) (hình 3-12):

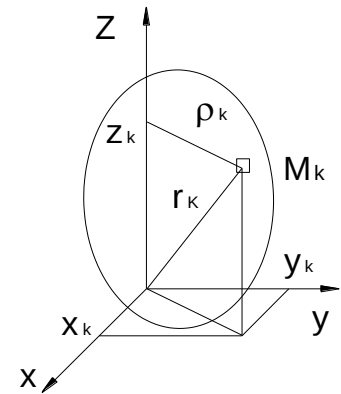
$$I_z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta m_k \rho_k^2 = \iiint_{(V)} \rho^2 dm \quad (3-26)$$

Trong đó ρ_k là khoảng cách của phần tử M_k đối với trục z.

Mô men quán tính của vật rắn đối với các trục tọa độ.

Khi đưa vào hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz ta có:

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dm \\ I_y &= \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) dm \\ I_x &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dm \end{aligned} \quad (3-27)$$



Hình 3-12

được gọi là mô men quán tính của vật rắn đối với các trục Ox, Oy, Oz tương ứng.

Mô men quán tính tích: Các đại lượng được gọi là các mô men quán tính tích:

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k y_k \Delta m_k = \iiint_{(V)} xy dm \\ I_{yz} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N y_k z_k \Delta m_k = \iiint_{(V)} yz dm \\ I_{zx} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N z_k x_k \Delta m_k = \iiint_{(V)} zx dm \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

Rõ ràng là: $I_{xy}=I_{yx}$; $I_{yz}=I_{zy}$; $I_{zx}=I_{xz}$.

Trục quán tính chính: Trục x được gọi là trục quán tính chính nếu:

$$I_{xy}=I_{xz}=0 \quad (3-29)$$

Tương tự trục y là trục quán tính chính nếu $I_{yx}=I_{yz}=0$, còn trục z là trục quán tính chính thì $I_{zx}=I_{zy}=0$.

Rõ ràng nếu hai trục đã là trục quán tính chính thì trục thứ ba là trục quán tính chính.

Trục quán tính chính trung tâm: Trục quán tính chính qua khối tâm được gọi là trục quán tính chính trung tâm.

Mô men quán tính của vật rắn đối với một điểm (hình 3-12):

$$I_O = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta m_k r_k^2 = \iiint_{(V)} r^2 dm \quad (3-29)$$

Để dàng chỉ ra rằng:
$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \quad (3-30)$$

Bán kính quán tính:

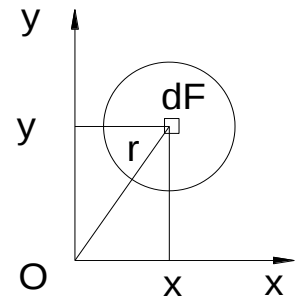
Đại lượng:
$$\rho_{qt}^2 = \frac{I_z}{M} \quad (3-31)$$

được gọi là bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z.

Đơn vị của mô men quán tính là kg.m^2 (kilogram mét bình phương) đơn vị của bán kính quán tính là m (mét).

Trong trường hợp đối với tiết diện phẳng F thì (hình 3-13).

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \iint_F y^2 dF \\ I_y &= \iint_F x^2 dF \\ I_{xy} &= \iint_F xy dF \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$



Hình 3-13

Mô men quán tính độc cực đại I_0 :

$$I_0 = \iint_F r^2 dF = I_x + I_y \quad (3-33)$$

Hệ trục có $I_{xy}=0$ gọi là hệ trục chính.

Hệ trục có $I_{xy}=0; S_x=S_y=0 \quad (3-34)$

Được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Tương ứng với các hệ trục đó ta có mô men quán tính chính hoặc mô men quán tính chính trung tâm.

Định lý 3-4: Mô men quán tính của vật rắn đối với trục Δ bằng tổng mô men quán tính của nó đối với trục song song với trục Δ qua khối tâm C của vật và tích của khối lượng vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục (hình 3-14):

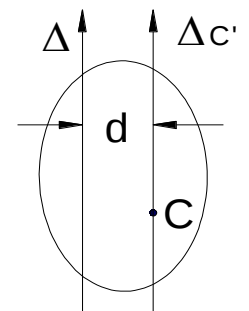
$$I_\Delta = I_{\Delta C} + Md^2 \quad (3-35)$$

Định lý 3-5: Nếu vật rắn đồng chất có một trục đối xứng thì trục đó là trục quán tính trung tâm.

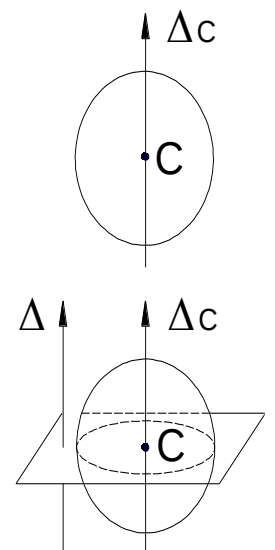
Định lý 3-6: Nếu vật rắn đồng chất có mặt phẳng đối xứng thì trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng và trục (hình 3-15).

- Mô men quán tính của một số vật đồng chất: Thanh đồng chất có chiều dài l, khối lượng M (hình 3-16):

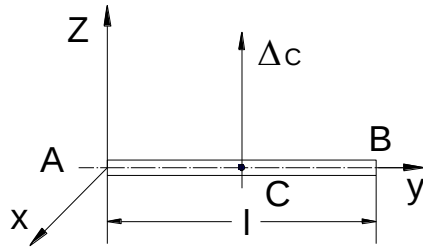
$$I_{\Delta C} = \frac{Ml^2}{12}; \quad I_x = I_z = \frac{Ml^2}{3}; \quad I_y = 0 \quad (3-36)$$



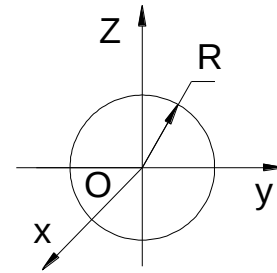
Hình 3-14



Hình 3-15



Hình 3-16



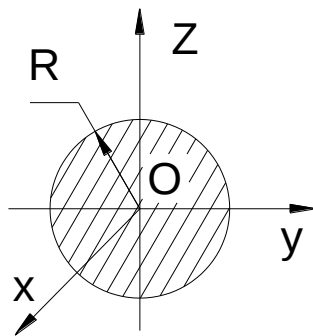
Hình 3-17

Vành tròn đồng chất có bán kính R, khối lượng M (hình 3-17):

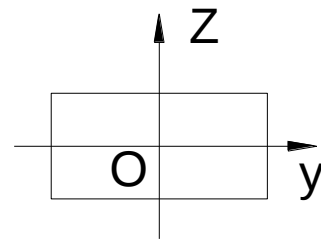
$$I_x = MR^2; \quad I_y = I_z = \frac{MR^2}{2} \quad (3-37)$$

Mặt tròn đồng chất, bán kính R, khối lượng M (hình 3-18):

$$I_x = \frac{MR^2}{2}; \quad I_y = I_z = \frac{MR^2}{4} \quad (3-38)$$



Hình 3-18



Hình 3-19

Tấm chữ nhật đồng chất, có các cạnh 2a và 2b, khối lượng M (hình 3-19).

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}; \quad I_y = \frac{Ma^2}{12} \quad (3-39)$$

Trụ tròn xoay đồng chất, khối lượng M, bán kính R, chiều cao h:

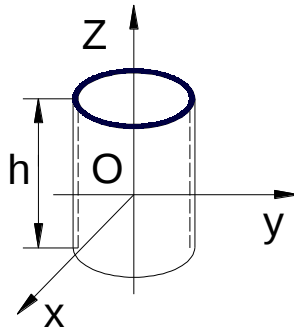
Trụ rỗng (hình 3-20)

$$I_z = MR^2; \quad I_x = I_y = \frac{M}{2} \left(R^2 + \frac{h^2}{6} \right) \quad (3-40a)$$

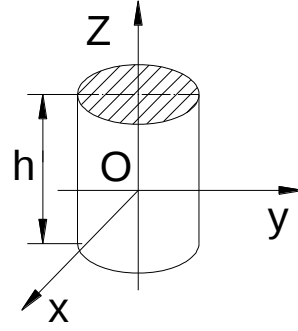
+ Trụ đặc (hình 3-21):

$$I_z = \frac{MR^2}{2}; \quad I_x = I_y = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \quad (3-40b)$$

Các kết quả nhận được dễ dàng áp dụng cho trường hợp của tiết diện phẳng khi chú ý đến (3-32), (3-33) và (3-34).



Hình 3-20



Hình 3-21

3.2.1.5. Lực suy rộng.

a. *Biểu thức công của lực trong di chuyển khả dĩ:* Công của lực trong di chuyển khả dĩ được gọi là công khả dĩ của lực. Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\{\delta \vec{r}_k\}$. Theo công thức tính công nguyên tố (3-6), biểu thức công khả dĩ của các lực sẽ là:

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k)$$

Giả sử các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Từ biểu thức (3-15) ta tính được:

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta y_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta z_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Khi thay các đại lượng này vào biểu thức công khả dĩ ở trên và sắp xếp lại các số hạng, ta được:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \end{aligned} \quad (3-42)$$

Trong trường hợp lực đặt lên vật rắn chuyển động tịnh tuyến thì:

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{F} \delta \vec{r}_c \quad (3-43)$$

C là khối tâm vật rắn.

Nếu lực đặt vào vật rắn quay quanh trục cố định thì:

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{m}_A(\vec{F}) \delta \varphi \quad (3-44)$$

Còn nếu lực đặt vào tấm phẳng chuyển động song phẳng thì:

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{m}_P(\vec{F}) \delta \varphi_s \quad (3-45)$$

Trong đó P là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng.

b. *Lực suy rộng.*

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \quad (3-46)$$

được gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_i .

Chú ý rằng lực suy rộng là đại lượng vô hướng.

Thứ nguyên của lực suy rộng là: $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$

Từ đó thấy rằng nếu tọa độ suy rộng là độ dài thì lực suy rộng là lực, nếu tọa độ suy rộng là góc thì lực suy rộng là ngẫu lực.

3.2.1.6. Liên kết lí tưởng.

Ta xét một lớp các liên kết thường gặp được gọi là liên kết lí tưởng.

Liên kết được gọi là lí tưởng nếu tổng công của tất cả các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không:

$$\sum \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0 \quad (3-47)$$

Trong thực tế nếu bỏ qua ma sát và tính đàn hồi của các vật thể thuộc cơ hệ thì đa số các liên kết thường gặp đều là các liên kết lí tưởng.

- Các vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.
- Hai vật rắn luôn luôn tựa vào nhau trong quá trình chuyển động và ma sát giữa chúng bỏ qua được là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.
- Dây mềm không dẫn vắt qua ròng rọc hay puli, nếu bỏ qua được ma sát trượt quay và sự trượt tương đối giữa ròng rọc hay puli với dây là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.

Dễ dàng chỉ ra rằng lực suy rộng của các lực liên kết lí tưởng triệt tiêu, tức là:

$$Q_i^R = \sum \vec{R}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (3-48)$$

3.2.2. Nguyên lí di chuyển khả dĩ.

3.2.2.1. Nguyên lí di chuyển khả dĩ.

Đối với cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng và lí tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng tại vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ từ vị trí đang xét đều triệt tiêu:

$$\sum \delta A_K = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \quad (3-49)$$

Trong đó $\vec{F}_k$ là lực hoạt động (hợp lực) tác dụng lên chất điểm M_k thuộc cơ hệ, $\delta \vec{r}_k$ là di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k . Phương trình (3-49) còn được gọi là phương trình công khả dĩ.

Chứng minh điều kiện cần:

Giả sử cơ hệ nằm cân bằng tại vị trí đang xét. Xét một chất điểm M_k thuộc cơ hệ chịu tác dụng lực hoạt động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$. Vì cơ hệ cân bằng nên mọi chất điểm phải cân bằng, tức là:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0$$

$$\text{Do đó:} \quad \sum (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \delta \vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \sum \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0$$

Do các liên kết của cơ hệ là lí tưởng nên ta có (3-49).

$$\text{Vậy} \quad \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0$$

Đó là điều phải chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ:

Giả sử cơ hệ cân bằng và tổng công khả dĩ của các lực hoạt động bằng không. Ta chứng minh rằng cơ hệ mãi cân bằng tại vị trí đã cho.

Thực vậy, giả sử có chất M_k (ít nhất là một) của cơ hệ dưới tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$ chuyển động từ vị trí đầu đứng yên. Di chuyển của nó được kí hiệu bởi $d\vec{r}_k$ ($\vec{r}_k$ là véc-tơ định vị của chất điểm M_k) có cùng phương với lực tác dụng lên chất điểm M_k là $\vec{F}_k + \vec{R}_k$ vì chất điểm chuyển động từ trạng thái đứng yên. Do liên kết là dừng nên phương của di chuyển thực trùng với một trong các phương của di chuyển khả dĩ, nên ta có thể chọn di chuyển khả dĩ trùng với di chuyển thực của nó. Vậy ta có:

$$\vec{\Phi}_k \delta \vec{r}_k = (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \delta \vec{r}_k = \vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \vec{R}_k \delta \vec{r}_k > 0$$

Lấy tổng hai vế đối với tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ và chú ý đến điều kiện về liên kết lí tưởng (3-49) ta nhận được:

$$\sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \sum \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k > 0$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy không thể (dù chỉ là một) chất điểm nào của cơ hệ chuyển động từ vị trí cân bằng đã cho. Đó là điều cần chứng minh.

3.2.2.2. Điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ.

Dựa vào biểu thức công khả dĩ (3-42), nguyên lí di chuyển khả dĩ được viết trong dạng sau:

$$\sum \delta A_F = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0 \quad (3-50)$$

Từ tính chất độc lập của các tọa độ suy rộng đủ nên các δq_i ($i=1, n$) cũng độc lập với nhau. Vậy đẳng thức (3-51) được thực hiện khi và chỉ khi:

$$Q_i = 0 \quad (i=1, n) \quad (3-51)$$

Định lí 3-3: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng và lí tưởng cân bằng tại một vị trí là các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng đủ phải đồng thời triệt tiêu.

Chú ý: Nếu dựa vào kí hiệu $\vec{v}_k^* = \frac{\delta \vec{r}_k}{dt}$, gọi là vận tốc khả dĩ thì nguyên lí khả dĩ có thể viết trong dạng:

$$\sum \vec{F}_k \vec{v}_k^* = 0 \quad (3-52)$$

Phương trình này được gọi là phương trình công suất khả dĩ.

Ví dụ 3-4: Cho cơ cấu tay quay con trượt OAB có $OA=r$, $AB=l$. Tay quay OA chịu tác dụng ngẫu lực M, con trượt B chịu tác dụng lực nằm ngang F (hình 3-22).

Tìm quan hệ giữa M và F để cơ cấu cân bằng ở vị trí đang xét. Bỏ qua ma sát ở các khớp động và trọng lực.

Giải

Khảo sát cơ hệ là hệ cơ cấu tay quay con trượt. Khi bỏ qua ma sát ở các khớp động, ta có một cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng, lí tưởng và chịu tác dụng các lực hoạt động như ngẫu lực M và lực F.

Cho cơ cấu một di chuyển khả dĩ ứng với di chuyển $\delta\varphi$ của tay quay OA và δs của con trượt B, hoặc tương đương với vận tốc góc ω^* của tay quay OA và vận tốc khả dĩ v^* của con trượt B. Phương trình công suất khả dĩ cho ta:

$$M\omega^* - Fv^* = 0$$

$$\text{Từ đó} \quad M = F \frac{v^*}{\omega^*}$$

Tỉ số $\frac{v^*}{\omega^*}$ là tỉ số truyền động của cơ cấu tay quay con trượt.

$$\text{Mà ta lại có} \quad \frac{v^*}{\omega^*} = OP$$

Vậy

$$M = FOP = F(OA' + A'P) = F(r\sin\varphi + r\cos\varphi\operatorname{tg}\psi) = Fr(\sin\varphi + \cos\varphi\operatorname{tg}\psi)$$

$$\text{Trong đó} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{r}{l} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2\varphi}}$$

3.2.3. Nguyên lí Đalămbe.

3.2.3.1. Lực quán tính của chất điểm.

Khảo sát chất điểm dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ đối với hệ quy chiếu quán tính. Ta dựa vào một định nghĩa:

Lực quán tính của chất điểm, kí hiệu $\vec{F}^{qt}$ có cùng phương, ngược chiều với gia tốc chất điểm và có giá trị bằng tích của khối lượng với gia tốc của chất điểm:

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{a} \quad (3-53)$$

Cần nhấn mạnh rằng lực quán tính của chất điểm không phải là lực tác dụng lên chất điểm. Để làm rõ điều này ta xét hai ví dụ sau:

Giả sử dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ xe chạy với gia tốc $\vec{a}$, theo định luật 2 của động lực học ($\vec{F} = m\vec{a}$).

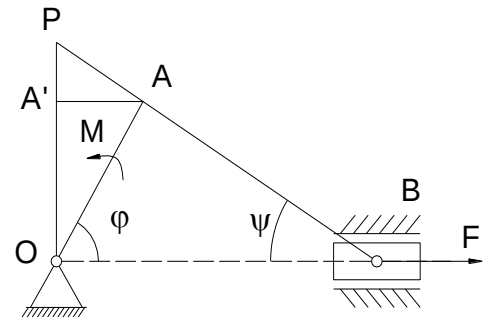
Lực $\vec{F}$ do tay tác dụng lên xe.

Vậy theo định luật tác dụng và phản tác dụng, xe sẽ tác dụng lên tay một lực $\vec{F}' = -\vec{F}$, nghĩa là:

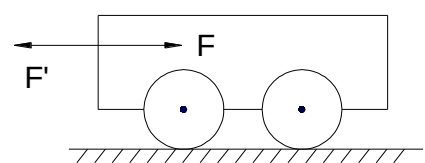
$$\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a} = \vec{F}^{qt}$$

Vậy $\vec{F}^{qt}$ chính là lực $\vec{F}'$ do xe tác dụng lên tay đẩy chứ không phải là lực tác dụng lên xe (hình 3-23).

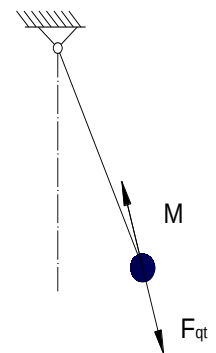
Khảo sát một chất điểm có khối lượng m buộc vào một đầu sợi dây. Dây quay đều với vận tốc góc ω_0 . Gia tốc của chất điểm là gia tốc hướng tâm. Vậy lực quán tính của chất điểm là lực li tâm. Lực đó không đặt lên chất điểm mà chính là lực mà chất điểm tác dụng lên dây và nhờ nó mà



Hình 3-22



Hình 3-23



Hình 3-24

dây luôn luôn căng. Lực tác dụng lên chất điểm, ngoài trọng lực, có lực do dây tác dụng lên chất điểm (phản lực của dây tác dụng lên chất điểm). Lực này hướng về tâm (lực hướng tâm), ngược chiều với lực quán tính (hình 3-24).

3.2.3.2. Nguyên lý D'alambert đối với chất điểm.

Tại mỗi thời điểm lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính của nó cân bằng nhau:

$$\vec{F} + \vec{F}^{qt} = 0 \quad (3-54)$$

Chứng minh:

Để khẳng định ta chỉ cần viết định luật 2 của Niu ton cho chất điểm được khảo sát:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Từ đó:

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = \vec{F} + \vec{F}^{qt} = 0$$

Chú thích

- Trong nguyên lý chỉ khẳng định sự cân bằng về lực (hai lực cùng đường tác dụng ngược chiều và cùng độ lớn) chứ không phải sự cân bằng của chất điểm.
- Trong trường hợp của chất điểm không tự do, lực tác dụng lên chất điểm là hợp lực của hoạt động và lực liên kết.
- Trạng thái cân bằng về lực được thiết lập mọi thời điểm.

Ví dụ 3-5: Với quả cầu nhỏ trọng lượng P được treo vào toa xe chuyển động thẳng với gia tốc $\vec{a}$. Dây treo quả cầu bị lệch một góc $\alpha = \text{const}$ so với đường thẳng đứng. Xác định gia tốc $\vec{a}$ của toa xe.

Giải

Xem quả cầu như một chất điểm chịu tác dụng của trọng lực và lực $\vec{T}$ do dây căng tác dụng lên quả cầu (hình 3-25).

Lực quán tính của chất điểm do gia tốc của chất điểm (bằng gia tốc của xe), sẽ bằng:

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{a} = -\frac{P}{g}\vec{a}$$

Còn lực thật tác dụng lên chất điểm (quả cầu) là hợp lực của trọng lượng $\vec{P}$ và phản lực $\vec{T}$ của dây (hình 3-25).

Theo nguyên lý D'alambert:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}^{qt} = 0$$

Chiếu hai vế của đẳng thức này lên phương Δ thẳng góc với dây, ta có:

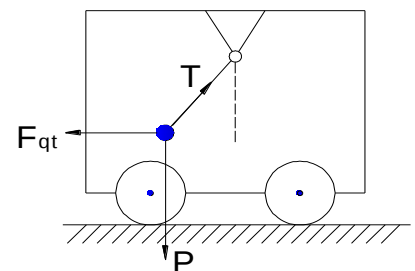
$$F^{qt}\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$$

$$\text{Từ đó} \quad \frac{P}{g}a\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$$

$$\text{Vậy} \quad a = g\tan\alpha.$$

3.2.3.3. Nguyên lý D'alambert đối với cơ hệ.

Khảo sát cơ hệ gồm N chất điểm $M_1, M_2, \dots, M_N$, dưới tác dụng của hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$.



Hình 3-25

Xét chất điểm M_k có khối lượng m_k chịu tác dụng của lực $\vec{F}_k$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}_k$. Lực quán tính của chất điểm này là: $\vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{a}_k$.

Theo nguyên lý Đalămbe đối với chất điểm, với mọi chất điểm của cơ hệ, ta có:

$$(\vec{F}_k, \vec{F}_k^{qt}) \equiv 0$$

Do đó nguyên lý Đalămbe đối với cơ hệ được phát biểu như sau:

Tại mỗi thời điểm các lực tác dụng lên các chất điểm của cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ tạo thành một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \dots, \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0 \quad (3-55)$$

Chú ý:

- Các lực $\vec{F}_k$ đối với cơ hệ tự do là hợp lực của ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm M_k , còn đối với cơ hệ không tự do là hợp lực của lực hoạt động và lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k .

- Khái niệm cân bằng ở đây có tính chất quy ước “hệ lực cân bằng là hệ lực có từng đôi một lực trực đối nhau”.

- Lực cân bằng (3-55) được thiết lập tại mỗi thời điểm, nên có thể thiết lập điều kiện cân bằng của nó đối với hệ trục tọa độ động và được sử dụng rất tiện lợi trong bài toán xác định phản lực trực quay. Tuy các lực quán tính (các gia tốc) của các chất điểm cần phải tính đối với hệ quy chiếu quán tính.

Ví dụ 3-6: Hai vật A và B có trọng lượng P_1 và P_2 liên kết với nhau bằng một sợi dây không dẫn trọng lượng không đáng kể. Hai vật chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát f nhờ tác dụng lực Q vào vật B theo phương ngang (hình 3-26). Xác định gia tốc của hai vật và lực căng của sợi dây.

Giải

Xét hệ gồm cả hai vật. Các lực ngoài tác dụng lên hệ gồm trọng lượng $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, lực ma sát trượt $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và lực kéo $\vec{Q}$.

Gọi lực quán tính đặt lên vật A và B là $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}$ ta có:

$$\vec{F}_1^{qt} = -\frac{P_1}{g} \vec{a}_1; \quad \vec{F}_2^{qt} = -\frac{P_2}{g} \vec{a}_2$$

Với $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$

Theo nguyên lý Đalămbe, ta có:

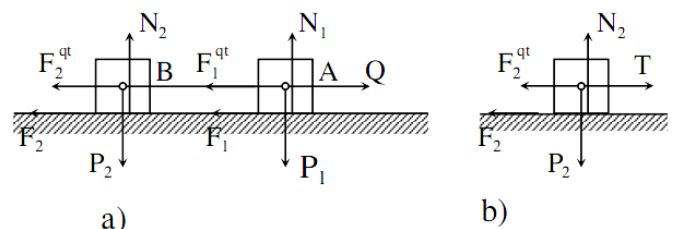
$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}) \equiv 0$$

Các lực này được biểu diễn trên hình 3-26a. Phương trình cân bằng theo phương trục Ox nằm ngang viết được:

$$Q - F_1^{qt} - F_2^{qt} - F_1 - F_2 = 0$$

$$\text{Hay } Q = \frac{P_2 + P_1}{g} a - (P_2 + P_1) f = 0$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{Q}{P_2 + P_1} - f \right) g$$



Hình 3-26

Từ kết quả tìm được trên, ta nhận thấy vật chuyển động khi:

$$f < \left(\frac{Q}{P_2 + P_1} \right)$$

Để tính lực căng T của dây ta phải tách một trong hai vật ra để xét chẳng hạn xét vật B. Các lực thực sự tác dụng lên vật B là: $(\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{T})$, lực quán tính là $\vec{F}_2^{qt}$. Các lực này được biểu diễn trên hình 3-26b.

Áp dụng nguyên lí Đalambé ta có:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{T}, \vec{F}_2^{qt}) \equiv 0$$

Viết phương trình của hệ cân bằng này lên phương ngang ta có:

$$Q - T - F_2 - F_2^{qt} = 0$$

$$Q - T - P_2 f - P_2 \frac{a}{g} = 0$$

Thay giá trị tìm được của a vào phương trình trên tính được:

$$T = \frac{QP_1}{P_1 + P_2}$$

Kết quả cho thấy lực căng của dây không phụ thuộc lực ma sát.

3.3. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ.

3.3.1. Định lý động lượng và định lý chuyển động khối tâm của cơ hệ.

3.3.1.1. Định lý động lượng.

Gọi $\vec{R}_F'$ là véc-tơ chính của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$ và chú ý đến tính chất triệt tiêu của véc-tơ chính của hệ nội lực ta có:

$$\vec{R}_F' = \sum \vec{F}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^e$$

Gọi $\vec{R}_{qt}'$ là véc-tơ chính của các lực quán tính:

$$\vec{R}_{qt}' = \sum \vec{F}_k^{qt} = -\sum m_k \vec{a}_k = -\sum m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum m_k \vec{v}_k$$

$m_k \vec{v}_k$ - tích giữa khối lượng và vận tốc chất điểm M_k được gọi là động lượng chất điểm M_k , còn

$$Q = \sum m_k \vec{v}_k \quad (3-56)$$

Được gọi là động lượng cơ hệ.

$$\text{Vậy} \quad \vec{R}_{qt}' = -\frac{d}{dt} \vec{Q}$$

Gọi $\vec{R}'$ là véc-tơ chính của hệ lực (3-55). Ta có:

$$\vec{R}' = \vec{R}_F' + \vec{R}_{qt}' = \sum \vec{F}_k^e - \frac{d}{dt} \vec{Q} = 0$$

Từ đó

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^e \quad (3-57)$$

$$\text{Và} \quad \bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^t \bar{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e \quad (3-58)$$

ở đó $\bar{Q}$ và $\bar{Q}_0$ là động lượng cơ hệ tương ứng với các thời điểm t và t_0 , còn

$$\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e = \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^t \bar{F}_k^e dt \quad (3-59)$$

Là tổng xung lực các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian $(t-t_0)$. Ta có định lý 3-4 và 3-5.

Định lý 3-4: Đạo hàm động lượng của cơ hệ theo thời gian bằng tổng các ngoại lực (véc-tơ chính của hệ ngoại lực) tác dụng lên cơ hệ.

Định lý 3-5: Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian đó.

Đối với trục Ox cố định, ta có:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \quad (3-60)$$

$$Q_x^{(1)} - Q_x^{(0)} = \sum_{t_0}^t \int F_{kx}^e dt = \sum S_{kx}^e \quad (3-61)$$

Trong đó chỉ số x kí hiệu hình chiếu của đại lượng tương ứng trên trục x .

Chú ý:

- Nội lực không ảnh hưởng đến sự biến đổi của động lượng cơ hệ.
- Nếu $\sum \bar{F}_k^e = 0$ (tức là véc-tơ chính của hệ ngoại lực triệt tiêu) thì động lượng cơ hệ được bảo toàn:
- Nếu $\sum F_{kx} = 0$ (tức tổng hình chiếu các ngoại lực trên trục cố định x triệt tiêu) thì hình chiếu của động lượng trên trục x được bảo toàn.

$$Q_x = \text{const} \quad (3-62)$$

3.3.1.2. Định lý chuyển động khối tâm của cơ hệ.

Dựa vào công thức xác định khối tâm cơ hệ (3-16), ta có:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k = \frac{d}{dt} (M\bar{r}_c) = M\bar{v}_c \quad (3-63)$$

Trong đó M và $\bar{v}_c$ lần lượt là khối lượng và vận tốc khối tâm của cơ hệ.

Vậy, động lượng của cơ hệ bằng động lượng khối tâm với giả thiết khối tâm có khối lượng bằng khối lượng của cơ hệ.

Công thức (3-57) có thể viết như sau:

$$\frac{d}{dt} \bar{Q} = \frac{d}{dt} (M\bar{v}_c) = M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e$$

Định lý 3-5: Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cơ hệ và chịu tác dụng của lực có véc-tơ bằng véc-tơ chính của ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \quad (3-64)$$

Khi chiếu hai vế của đẳng thức (3-64) lên các trục của hệ trục tọa độ Đề các vuông góc ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^e \\ M\ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^e \\ M\ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^e \end{aligned} \right\} \quad (3-65)$$

Nhận xét

- Nội lực không ảnh hưởng đến chuyển động của khối tâm (dù rằng có ảnh hưởng đến chuyển động đến chuyển động của từng bộ phận của cơ hệ).

- Nếu $\sum \vec{F}_k^e = \vec{0}$ thì $\vec{a}_c = \vec{0}$ tức $\vec{v}_c = \overrightarrow{const}$ hoặc $\vec{v}_c = \vec{0}$. Vậy:

Nếu véc-tơ chính của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không thì khối tâm của cơ hệ hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

- Nếu $\sum F_{kx}^e = 0$ thì $\ddot{x}_c = const$ hoặc $\dot{x}_c = 0$. Vậy:

Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực trên một trục cố định nào đó luôn luôn bằng không thì hình chiếu của khối tâm trên trục đó hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Ví dụ 3-6: Trục quay của động cơ được mô hình bằng một khối lượng lệch tâm m_2 cách tâm trục quay một khoảng bằng e ($OM=e$). Giả sử trục động cơ quay đều với vận tốc góc ω . Vỏ mô tơ có khối lượng m_1 . Hãy xác định:

- 1) Chuyển động ngang của vỏ mô tơ trên nền nhẵn.
- 2) Áp lực thẳng đứng của động cơ trên nền ngang.

Giải

Khảo sát chuyển động cơ hệ gồm mô tơ, rôto và khối lượng lệch tâm (hình 3-27).

Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực của trục mắt cân bằng $\vec{P}_2$, của vỏ động cơ $\vec{P}_1$ và phản lực $\vec{N}$ của nền lên động cơ. Đó là hệ lực song song theo phương thẳng đứng.

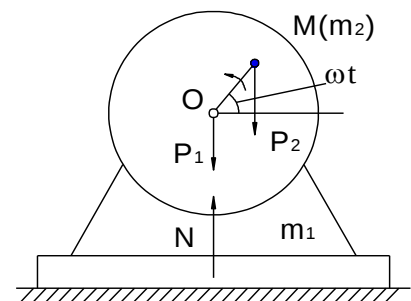
Vậy $\sum F_{kx}^e = 0$ nên $x_c = const = 0$ do ban đầu hệ đứng yên.

Theo công thức tính tọa độ khối tâm ta có:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 + e \cos \omega t)}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\text{Từ đó: } x_1 = -\frac{m_2 e}{m_1 + m_2} \cos \omega t$$

Vậy vỏ động cơ dao động điều hòa với biên độ a và chu kỳ T :



Hình 3-27

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Để tìm phản lực ta viết phương trình vi phân chuyển động của khối tâm theo phương thẳng đứng hướng lên Oy.

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2$$

$$\text{Từ đó: } N = P_1 - P_2 + (m_1 + m_2)\ddot{y}_C = (P_1 + P_2)\left(1 + \frac{\ddot{y}_C}{g}\right)$$

Theo công thức tính khối tâm, ta có:

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 0 + m_2 e \sin \omega t}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 e}{m_1 + m_2} \sin \omega t$$

$$\text{Vậy: } \ddot{y}_C = -\frac{m_2 e \omega^2}{m_1 + m_2} \sin \omega t$$

$$\text{Từ đó: } N = (P_1 + P_2)\left[1 - \frac{m_2 e \omega^2}{g(m_1 + m_2)} \sin \omega t\right]$$

Để điều kiện này không được thỏa mãn thì động cơ sẽ bật khỏi nền và gây nên va đập.

3.3.2. Định lý mô men động lượng.

Gọi $\vec{m}_F^O$ và $\vec{m}_{qt}^O$ lần lượt là mô men chính đối với một điểm O cố định của các lực tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ:

$$\vec{m}_F^O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e)$$

Do mô men chính của hệ nội lực luôn luôn triệt tiêu. Còn mô men của các lực quán tính $\vec{m}_{qt}^O$ bằng:

$$\begin{aligned} \vec{m}_{qt}^O &= \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) = \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{qt} = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{a}_k \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k \right] \end{aligned}$$

Trong đó: $\vec{r}_k$ - véc-tơ định vị của chất điểm M_k ; $m_k \vec{v}_k$ - động lượng chất điểm M_k ; $\vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k$ - mô men động lượng của chất điểm M_k đối với điểm O cố định.

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k = \sum \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k) \quad (3-66)$$

Chính là tổng mô men các động lượng các chất điểm đối với điểm O, gọi tắt là mô men động lượng cơ hệ động cơ điểm O.

$$\text{Vậy: } \vec{m}_{qt}^O = -\frac{d}{dt} \vec{L}_O$$

Vì mô men chính của hệ lực “cân bằng” (3-55) triệt tiêu nên:

$$\vec{m}_F^O + \vec{m}_{qt}^O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) - \frac{d}{dt} \vec{L}_O = 0$$

Do đó:

$$\frac{d}{dt} \bar{L}_z = \sum \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) \quad (3-67)$$

Định lý 3-6: Đạo hàm theo thời gian của mô men động lượng của cơ hệ đối với một điểm (một trục) cố định bằng tổng mô men của các ngoại lực đối với cùng điểm (trục) đó.

Nhận xét:

- Nội lực không ảnh hưởng đến sự biến đổi mô men động lượng cơ hệ

- Nếu $\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\bar{L}_z = \text{const}$ hoặc

Nếu $\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\bar{L}_z = \text{const}$

Vậy, nếu tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với một điểm (một trục) cố định luôn bằng không thì mô men động lượng của cơ hệ đối với điểm (trục) đó sẽ không đổi.

- Phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định.

Xét vật rắn quay quanh một trục cố định. Các ngoại lực tác dụng lên vật rắn gồm các lực hoạt động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ và các phản lực liên kết $\vec{R}_A, \vec{R}_B$.

Đầu tiên chú ý rằng:

$$\bar{L}_z = I_z \bar{\omega} \quad (3-68)$$

Trong đó: $\bar{\omega}$ là vận tốc góc của vật; I_z - mô men quán tính của vật rắn đối với trục quay.

Thực vậy một phần tử M_k có khối lượng m_k nằm cách trục quay khoảng cách h_k có véc-tơ động lượng $m_k \vec{v}_k$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay có trị số $m_k h_k \omega_k$ (hình 3-28).

Vậy:

$$\begin{aligned} \bar{L}_z &= \sum m_z(m_k \vec{v}_k) \\ &= \sum m_k h_k^2 \bar{\omega} = \bar{\omega} \sum m_k h_k^2 = I_z \bar{\omega} \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng công thức (3-67) ta có:

$$\frac{d}{dt}(I_z \bar{\omega}) = I_z \frac{d\bar{\omega}}{dt} = I_z \bar{\varepsilon} = \sum \bar{m}_z(\vec{F}_k)$$

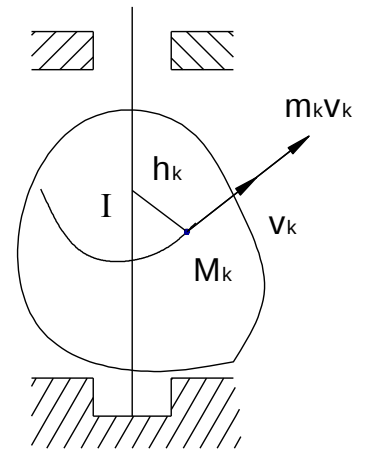
Đó là phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định.

$$I_z \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dt^2} \equiv I_z \frac{d\bar{\omega}}{dt} \equiv I_z \bar{\varepsilon} = \sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) \quad (3-69)$$

Ví dụ 3-6: Viết phương trình vi phân chuyển động của một con lắc vật lý có khối lượng M , mô men quán tính đối với trục quay là I_0 , khoảng cách từ khối tâm đến trục quay bằng a .

Giải

Viết phương trình vi phân chuyển động vật quay (3-69) cho con lắc vật lý ta nhận được:



Hình 3-28

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Pa \sin \varphi$$

Nếu xem góc lắc φ khá bé, ta có thể lấy $\sin \varphi \approx \varphi$.

Phương trình vi phân chuyển động của con lắc bây giờ có dạng:

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + Pa \sin \varphi = 0 \text{ hoặc } \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 \text{ với } k^2 = \frac{Pa}{I_0}$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng: $\varphi = A \sin(kt + \alpha)$

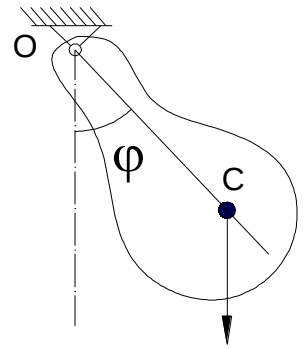
Trong đó A và α là các hằng số tích phân, được xác định từ điều kiện đầu (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu).

Dao động bé của con lắc vật lý là dao động điều hòa với chu kì T :

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Pa}}$$

$$\text{Từ đó } I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} Pa$$

Bằng cách như vậy, ta có một phương pháp đơn giản (phương pháp lắc) để xác định mô men quán tính của vật rắn (hình 3-29).



Hình 3-29

3.3.3. Định lý động năng.

3.3.3.1. Định lý động năng.

Gọi W_F và W_{qt} lần lượt là tổng công suất của các lực tác dụng lên cơ hệ và của các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ:

$$W_F = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k ;$$

$$\begin{aligned} W_{qt} &= \sum \vec{F}_k^{qt} \vec{v}_k = -\sum m_k \vec{a}_k \vec{v}_k = -\sum m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \vec{v}_k \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum m_k \vec{v}_k^2 \right) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 \end{aligned}$$

Đại lượng $\frac{1}{2} m_k v_k^2$ được gọi là động năng của chất điểm M_k , còn:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 \quad (3-68)$$

Được gọi là động năng của cơ hệ. Vậy: $W_{qt} = -\frac{dT}{dt}$

Vì hệ lực (3-55) cân bằng nên theo (3-53) tổng công suất của tất cả các lực triệt tiêu:

$$W_F + W_{qt} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k - \frac{dT}{dt} = 0$$

$$\text{Vậy: } \frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k \quad (3-69)$$

Định lý 3-7: Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của tất cả các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) tác dụng lên cơ hệ.

Từ (3-69) ta có:

$$dT = \sum \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k dt = \sum \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum dA_k \quad (3-70)$$

Định lý 3-8: Vi phân động năng cơ hệ bằng tổng công nguyên tố của các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) tác dụng lên cơ hệ.

Khi tích phân hai vế của đẳng thức (3-70) với các cận tương ứng ta được:

$$T - T_0 = \sum A_k \quad (3-71)$$

Định lý 3-9: Biến thiên động năng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng công của các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) sinh ra trong chuyển dời ứng với thời gian đó.

Cần chú ý rằng khác với các định lý về động lượng, chuyển động khối tâm và mô men động lượng, nội lực làm biến đổi động năng cơ hệ. Vì lý do đó định lý động năng phản ánh sâu sắc bản chất quá trình thay đổi chuyển động của cơ hệ và nhờ nó trạng thái chuyển động của cơ hệ được nghiên cứu sâu sắc.

3.3.3.2. Áp dụng.

a. *Biểu thức động năng của vật rắn chuyển động.*

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến: Vật có khối lượng M chuyển động với vận tốc $\vec{v}$

Trong trường hợp này các phần tử của vật đều có cùng vận tốc v . Do đó:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k v^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_k \right) v^2 = \frac{1}{2} M v^2 \quad (3-72)$$

- Vật rắn chuyển động quay xung quanh một trục cố định (hình 3-): Xét một phần tử M_k của vật rắn có khối lượng m_k nằm cách trục quay một đoạn h_k . Gọi ω là vận tốc góc của vật thì: $v_k = h_k \omega$.

$$\text{Do đó:} \quad T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k h_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_k h_k^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (3-73)$$

Trong đó: I_z là mô men quán tính của vật đối với trục quay.

- Vật rắn chuyển động song phẳng: Xét trường hợp một tấm phẳng có khối lượng M , vận tốc khối tâm v_c và vận tốc góc ω (đối với hệ trục tọa độ tịnh tiến cùng với khối tâm). Gọi P là tâm vận tốc tức thời của tấm phẳng. Một phần tử M_k có khối lượng m_k , cách tâm quay tức thời một đoạn h_k có vận tốc bằng: $v_k = h_k \omega$.

$$\text{Vậy:} \quad T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k h_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_k h_k^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Trong đó: I_P là mô men quán tính của tấm phẳng đối với trục quay qua P và thẳng góc với mặt phẳng tấm.

Theo định lý về mô men quán tính đối với các trục song song (định lý 3-4) ta có:

$$I_P = I_C + M \overline{PC}^2$$

Trong đó: I_C là mô men quán tính của tấm đối với trục đi qua khối tâm C và thẳng góc với mặt phẳng tấm.

Do đó:

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2} \left(I_C + M \overline{PC}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} M (PC \omega)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (3-74)$$

b. Biểu thức tính công của một số lực.

- Công của trọng lực: Công của trọng lực $\vec{P}$: $W = \vec{P} \vec{v} = Pz$

Công của trọng lực khi điểm đặt di chuyển từ M_1 đến M_2 :

$$A = \int_{M_1}^{M_2} W dt = \int_{M_1}^{M_2} P \dot{z} dt = \int_{M_1}^{M_2} P dz$$

$$A = P(z_2 - z_1) = \pm Ph \quad (3-75)$$

Công của trọng lực sẽ dương khi điểm đặt hạ xuống và âm khi điểm đặt được nâng lên và bằng không khi điểm đặt di chuyển trong mặt phẳng ngang.

Công thức (3-75) còn đúng cho trường hợp của hệ trọng lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_N)$, trong đó $P = \sum_{k=1}^N P_k$, còn $h = h_C$ là khoảng cách di chuyển trọng tâm C theo độ cao:

$$A = \pm \left(\sum P_k \right) h_C \quad (3-76)$$

- Công của lực đàn hồi tuyến tính $\vec{F} = -c\vec{r}$ trong đó $\vec{r}$ là véc-tơ định vị của điểm đặt lực, c là hệ số tỉ lệ:

$$A = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -c \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_2} \vec{r} d\vec{r} = -\frac{1}{2} c \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_2} d(\vec{r}^2) = -\frac{1}{2} c \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_2} d(\vec{r}^2)$$

$$\text{Vậy: } A = -\frac{1}{2} c (r_2^2 - r_1^2) \quad (3-77)$$

$$\text{Trong trường hợp lò xo ta có: } A = -\frac{1}{2} c \delta^2 \quad (3-78)$$

Trong đó: δ là độ biến dạng của lò xo với trạng thái không biến (trạng thái tự nhiên).

- Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động tịnh tiến:

$$\text{Công suất: } W = \vec{F} \vec{v} = \vec{F} \vec{v}_C \quad (3-79)$$

$$\text{Vậy: } A = \int W dt = \int \vec{F} \vec{v}_C dt = \int \vec{F} d\vec{r}_C \quad (3-80)$$

- Công của lực tác dụng lên một vật quay quanh một trục cố định: Xét trường hợp lực $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng thẳng góc với trục quay (hình 3-).

$$\text{Công suất: } W = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \alpha = FR \cos \varphi = \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{\omega}$$

$$\text{Vậy: } W = \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{\omega} \quad (3-81)$$

$$A = \int W dt = \int \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{\omega} dt$$

$$A = \int \vec{m}_O(\vec{F}) d\varphi \quad (3-82)$$

Các công thức (3-81), (3-82) còn đúng trong trường hợp lực $\vec{F}$ bất kỳ, trong đó mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O được thay thế bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục quay:

$$W = \overline{m}_z(\vec{F})\overline{\omega}; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \overline{m}_z(\vec{F})d\overline{\varphi} \quad (3-83)$$

Các công thức (3-81), (3-82) và (3-83) còn đúng cho trường hợp ngẫu lực tác dụng lên vật quay, trong đó mô men của lực đối với trục được thay thế bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục quay:

$$W = \overline{m}_z\overline{\omega}; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \overline{m}_z d\overline{\varphi} \quad (3-84)$$

- Công của lực đặt lên tấm phẳng chuyển động song phẳng

Có thể xem tấm phẳng quay quanh tâm vận tốc tức thời, lúc đó áp dụng công thức (3-81) và (3-82), ta có:

$$W = \overline{m}_p(\vec{F})\overline{\omega}; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \overline{m}_p(\vec{F})d\overline{\varphi} \quad (3-85)$$

Có thể xem tấm phẳng chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm C và quay quanh khối tâm C, lúc đó áp dụng đồng thời các công thức (3-79), (3-80), (3-81) và (3-82):

$$W = \overline{m}_C(\vec{F})\overline{\omega} + \vec{F}_C \cdot \vec{v}_C; \quad A = \int \overline{m}_C(\vec{F})d\overline{\varphi} + \int \vec{F}_C d\vec{r}_C \quad (3-86)$$

Trong trường hợp tấm phẳng chịu tác dụng của ngẫu lực $\vec{m}$ nằm trong mặt phẳng tấm thì:

$$W = \overline{m}\overline{\omega}; \quad A = \int \overline{m}d\overline{\varphi} \quad (3-87)$$

Ví dụ 3-7: Một rơ moóc chở hàng chuyển động trên đường ngang dưới tác dụng lực nằm ngang $\vec{F}$ có giá trị không đổi. Thùng xe và vật liệu có khối lượng M, hai bánh xe mỗi bánh có khối lượng m, bán kính R, được xem như các điểm đồng chất. Bỏ qua sức cản lăn và sức cản không khí.

Tính gia tốc của thùng xe và vận tốc của thùng xe theo quãng đường đi từ trạng thái đầu đứng yên.

Giải

Khảo sát cơ hệ gồm thùng và hai bánh xe. Thùng xe chuyển động tịnh tiến, hai bánh xe chuyển động song phẳng (hình 3-30).

Lực tác dụng lên xe chỉ gồm lực $\vec{F}$ sinh công (trọng lực và phản lực pháp tuyến mặt đường tác dụng lên các bánh xe không sinh công vì có phương vuông góc với di chuyển, lực ma sát trượt giữa các bánh xe và mặt đường cũng không sinh công do lăn không trượt vì vận tốc các điểm đặt lực bằng không).

Động năng cơ hệ gồm động năng thùng xe và động năng của hai bánh xe:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$$

Do điều kiện lăn không trượt: $\omega = \frac{v}{R}$ và $I = \frac{mR^2}{2}$, nên $T = \frac{1}{2}(M + 3m)v^2$

Công suất của lực $\vec{F}$ bằng: $W = \vec{F}\vec{v} = Fv$

Áp dụng định lí động năng dạng đạo hàm (định lí 3-7): $\frac{dT}{dt} = W$

Ta nhận được: $(M+3m)va=Fv$

Thùng xe chuyển động nên $v \neq 0$.

Vậy: $a = \frac{F}{M+3m} = \text{const}$

Tức thùng xe chuyển động nhanh dần đều.

Sử dụng định lí động năng dạng hữu hạn (định lí 3-9) ta có ($T_0=0$):

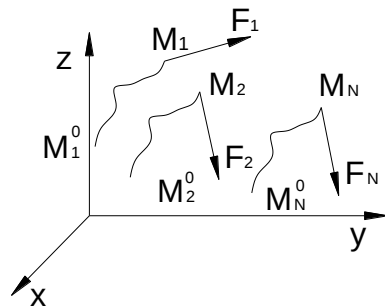
$$\frac{1}{2}(M+3m)v^2 = Fs$$

$$\text{Từ đó: } v = \sqrt{2 \frac{F}{M+3m} s} = \sqrt{2qs}$$

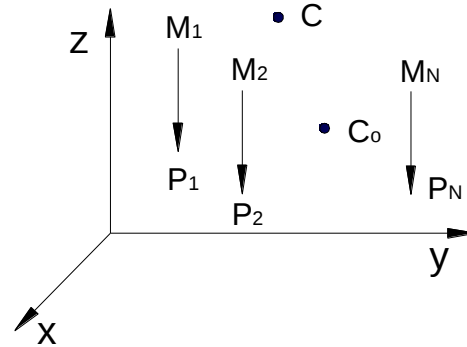
3.3.4. Định lí bảo toàn cơ năng.

3.3.4.1. Trường lực thế- Thế năng.

Trường lực là khoảng không gian vật lí mà khi cơ hệ chuyển động trong đó, các chất điểm của nó chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí cơ hệ (tức vị trí các chất điểm của cơ hệ) còn công các lực tác dụng lên cơ hệ không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo các chất điểm mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của cơ hệ (hình 3-31).



Hình 3-31



Hình 3-32

Thế năng cơ hệ kí hiệu Π là tổng công của tất cả các lực thế tác dụng lên cơ hệ khi nó di chuyển từ một vị trí đang xét, kí hiệu “vị trí M” đến một vị trí được chọn làm gốc, kí hiệu “vị trí O”. Vậy:

$$\Pi(M) = \sum A_{M\bar{O}} \quad (3-88)$$

Trong đó: $\sum A_{M\bar{O}}$ là tổng công các lực khi cơ hệ di chuyển từ “vị trí M” đến “vị trí gốc O”. Từ đó suy ra rằng:

$$\Pi(O) = 0; \quad \Pi(M_1) = \sum A_{M_1\bar{O}}$$

Vì công của lực trong trường lực thế không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt lực, nên cơ hệ di chuyển từ vị trí M đến vị trí gốc O có công theo mọi đường đều bằng công theo con đường qua “vị trí M_1 ”.

$$\Pi(M) = \sum A_{M\bar{O}} = \sum A_{MM_1} + \sum A_{M_1\bar{O}} = \sum A_{MM_1} + \Pi(M_1)$$

Vậy

$$\Pi(M) - \Pi(M_1) = \sum A_{\bar{M}M_1} \quad (3-89)$$

Tức chênh lệch thế năng tại hai vị trí bằng tổng công các lực khi cơ hệ di chuyển từ vị trí này đến vị trí kia.

3.3.4.2. Định lý bảo toàn cơ năng.

Giả sử cơ hệ chuyển động từ “vị trí M^0 ” đến “vị trí M ”.

Theo định lý động năng ta có $T_M - T_{M^0} = \sum A_{\bar{M}^0M_1}$

Nhưng dựa vào công thức (3-89) ta có:

$$\sum A_{\bar{M}^0M} = \Pi(M^0) - \Pi(M)$$

$$\text{Vậy } T_M - T_{M^0} = \Pi(M^0) - \Pi(M)$$

$$\text{Hay } T_M + \Pi(M) = T_{M^0} + \Pi(M^0) = \text{const} \quad (3-90)$$

Đại lượng $E = T + \Pi$, tổng của động năng và thế năng của hệ, được gọi là cơ năng của hệ.

Định lý 3-10: (Định lý bảo toàn cơ năng): Khi cơ hệ chuyển động trong trường lực thế thì cơ năng của cơ hệ được bảo toàn.

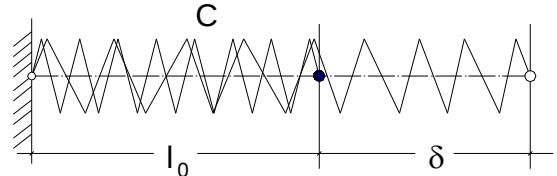
3.3.4.3. Biểu thức tính thế năng của một số lực thế.

- Thế năng trọng lượng: Chọn mặt đất làm “vị trí gốc” của thế năng. Khi cơ hệ nằm tại một vị trí mà trọng tâm C của nó cách mặt đất độ cao h_c thì (hình 3-32):

$$\Pi = \left(\sum P_k \right) h_c$$

- Thế năng đàn hồi: Khi lò xo bị biến dạng so với trạng thái tự nhiên của một lượng δ thì (hình 3-33):

$$\Pi = \frac{1}{2} c \delta^2$$



Hình 3-33

Trong đó: c là độ cứng lò xo.

3.4. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN.

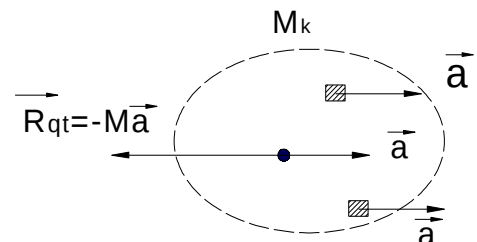
3.4.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến.

3.4.1.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tịnh tiến.

Khảo sát một vật rắn có khối lượng M chuyển động tịnh tiến với gia tốc $\vec{a}$. Xem vật rắn gồm vô số các phần tử M_k , có khối lượng m_k , đều chuyển động với gia tốc $\vec{a}$. Trong trường hợp này có hệ lực quán tính gồm vô số các lực song song cùng chiều (ngược chiều với gia tốc $\vec{a}$) (hình 3-34).

Sử dụng phương pháp thu gọn hệ lực, ta thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C của vật ta sẽ được một lực (tức hệ lực quán tính có hợp lực) cùng phương ngược chiều với gia tốc $\vec{a}$.

$$\vec{R}_{qt} = -M\vec{a} \quad (3-91)$$



Hình 3-34

3.4.1.2. Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn tịnh tiến.

Giả sử vật rắn chịu tác dụng các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, theo nguyên lý Đalămbe nó phải có hợp lực đặt tại khối tâm C của vật rắn và trực đối với hợp lực của hệ lực quán tính:

$$\vec{R}_F + \vec{R}_{qt} = \vec{0} \rightarrow \sum \vec{F}_k - M\vec{a}_C = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{qt}^C \equiv \vec{0} \rightarrow \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) \equiv \vec{0}$$

$$\text{Từ đó } M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \text{ và } \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) \equiv \vec{0} \quad (3-92)$$

Vậy vật tịnh tiến chuyển động như một chất điểm có khối lượng của vật, chịu tác dụng một lực có véc-tơ lực bằng tổng các lực tác dụng lên vật.

3.4.2. Vật rắn quay quanh một trục cố định.

Trường hợp tấm phẳng quay quanh một trục cố định vuông góc với mặt phẳng của tấm (hình 3-35).

3.4.2.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính.

Khi thu gọn hệ lực quán tính về trục quay O của tấm ta được lực:

$$\vec{R}_O^{qt} = -M\vec{a}_C \quad (3-93)$$

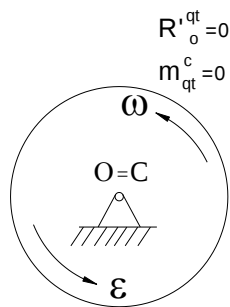
Và một ngẫu lực:

$$\vec{m}_O^{qt} = -I_O \vec{\varepsilon} \quad (3-94)$$

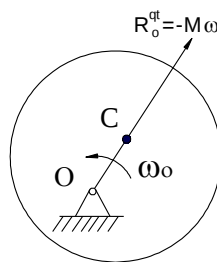
Trong đó: M- khối lượng của tấm phẳng;

I_O - mô men quán tính của tấm phẳng đối với trục quay O; $\vec{\varepsilon}$ - gia tốc góc của tấm; $\vec{a}_C$ - gia tốc khối tâm C của tấm.

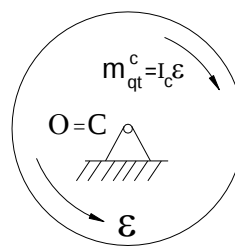
- Nếu tấm quay đều quanh trục qua khối tâm ($O \equiv C, \varepsilon=0, a_C=0$) thì $\vec{R}_O^{qt} = 0, \vec{m}_O^{qt} = 0$. Trường hợp này gọi là trục quay cân bằng (hình 3-36).



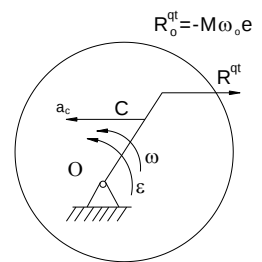
Hình 3-36



Hình 3-37



Hình 3-38



Hình 3-39

- Nếu tấm quay đều quanh trục không qua khối tâm C thì: $\vec{R}_O^{qt} = -M\vec{a}_C^n; \vec{m}_{qt}^C = 0$. Hệ số lực quán tính tương đương với một lực hướng tâm (từ C đến trục quay O), có trị số $\vec{R}_O^{qt} = M\omega_o^2 e$, e là khoảng cách từ khối tâm đến trục quay O (hình 3-37).

- Nếu tấm quay không đều quanh trục qua khối tâm ($O \equiv C, \varepsilon \neq 0$) thì $a_C=0$ nên hệ lực quán tính tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}_{qt}^C = I_C \vec{\varepsilon}$ (hình 3-38).

- Trong trường hợp tấm quay không đều quanh một trục không qua khối tâm thì chứng minh được rằng hệ lực quán tính tương đương với một lực (tức hệ lực quán tính có hợp lực) (hình 3-39).

Các trường hợp trên còn đúng cho trường hợp vật quay quanh trục quán tính chính.

3.4.2.2. Phương trình vi phân chuyển động và phản lực trục quay.

Giả sử tấm phẳng chịu tác dụng của các lực phẳng ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$). Đó là các lực hoạt động. Lực liên kết là phản lực $\vec{R}_O$. Theo nguyên lý Đalămbe ta có:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N, \vec{R}_O, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \dots, \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0$$

Điều kiện véc-tơ chính và mô men chính đối với trục quay O triệt tiêu cho ta:

$$\sum \vec{F}_k + \vec{R}_O - M\vec{a}_C = 0$$

$$\sum \vec{m}_O + (\vec{F}_k) - I_O \vec{\varepsilon} = 0$$

Phương trình cuối cho ta phương trình vi phân chuyển động của vật quay:

$$I_O \vec{\varepsilon} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \quad (3-95)$$

Từ đây ta tìm được gia tốc $\vec{\varepsilon}$. Tích phân ta được vận tốc góc $\vec{\omega}$. Do đó tìm được gia tốc khối tâm C ($\vec{a}_C$).

Phương trình đầu cho ta xác định được phản lực trục quay O:

$$\vec{R}_O = M\vec{a}_C - \sum \vec{F}_k \quad (3-96)$$

Ví dụ 3-8: Một trục máy quay đều với vận tốc góc không đổi ω_0 quanh trục nằm ngang được xem như gồm ba đĩa gắn chặt vào nhau và cùng quay với trục. Các đĩa có khối lượng lần lượt là m_1, m_2, m_3 , có các khối tâm là C_1, C_2, C_3 cùng nằm trong mặt phẳng với trục quay và cách trục tâm của trục quay các đoạn tương ứng e_1, e_2 và e_3 . Các kích thước khác cho trên hình 3-40. Xác định các phản lực tại các ổ trục A và B tại vị trí các khối tâm nằm trong mặt phẳng thẳng đứng cùng với trục tâm.

Giải

Vì trục quay đều nên hệ lực quán tính của các đĩa có hợp lực là những lực li tâm (hình 3-40). Tại thời điểm khảo sát các lực này nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và có trị số:

$$F_1^{qt} = m_1 e_1 \omega_0^2$$

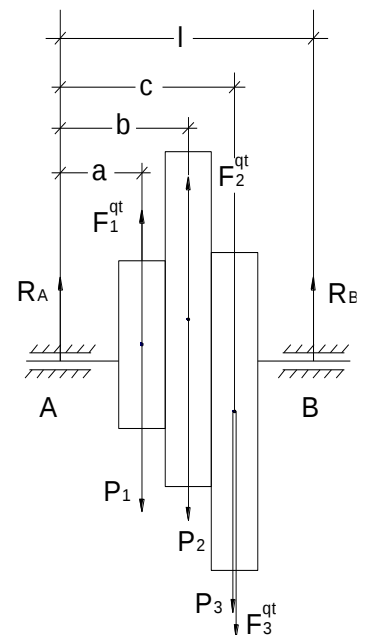
$$F_2^{qt} = m_2 e_2 \omega_0^2$$

$$F_3^{qt} = m_3 e_3 \omega_0^2$$

Gọi các phản lực tại các ổ trục A và B tương ứng là $\vec{R}_A$ và $\vec{R}_B$.

Theo nguyên lý Đalămbe ta có hệ thức sau:

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \vec{F}_3^{qt}) \equiv 0$$



Hình 3-40

Đây là hệ lực song song theo phương thẳng đứng.

Các phương trình cân bằng là:

$$\sum F_y = R_A + R_B - P_1 - P_2 - P_3 + F_1^{qt} + F_2^{qt} + F_3^{qt} = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}) = F_1^{qt}a - P_1a + F_2^{qt}b - P_2b - P_3c - F_3^{qt}c + R_Bl = 0$$

Khi thay các trị số của lực quán tính ta được:

$$R_A = \frac{1}{l} \{ P_1(l-a) + P_2(l-b) + P_3(l-c) + [m_3e_3(l-c) - m_1e_1(l-a) - m_2e_2(l-b)]\omega_0^2 \}$$

$$R_B = \frac{1}{l} \{ P_1a + P_2b + P_3c + (m_3e_3c - m_1e_1a - m_2e_2b)\omega_0^2 \}$$

3.4.3. Vật rắn chuyển động song phẳng.

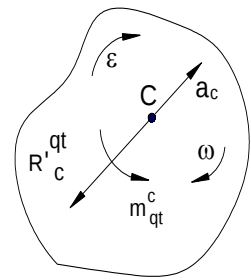
3.4.3.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính.

Giả sử tại thời điểm khảo sát tấm phẳng có gia tốc khối tâm $\vec{a}_C$. Vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$. Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta được một lực:

$$\vec{R}_C^{qt} = -M\vec{a}_C \quad (3-97)$$

Và một ngẫu lực:

$$\vec{m}_{qt}^C = -I_C\vec{\varepsilon} \quad (3-98)$$



Hình 3-41

Trong đó: M là khối lượng tấm phẳng; I_C là mô men quán tính của tấm phẳng đối với khối tâm C (hình 3-41).

3.4.3.2. Phương trình vi phân chuyển động của tấm phẳng: Giả sử hệ lực tác dụng lên tấm phẳng ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$).

Theo nguyên lý Đalămbe ta có hệ lực cân bằng sau:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \dots, \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0$$

Điều kiện véc-tơ chính và mô men chính đối với khối tâm C của hệ lực này triệt tiêu, ta có:

$$\sum \vec{F}_k - M\vec{a}_C = 0; \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) - I_C\vec{\varepsilon} = 0$$

Từ đây ta nhận được:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k; I_C\vec{\varepsilon} = \sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) \quad (3-99)$$

Nếu chọn hệ trục tọa độ Đề các Oxyz vuông góc gắn liền với hệ quy chiếu quán tính ta có:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum F_{kx} \\ M\ddot{y}_C &= \sum F_{ky} \\ M\ddot{z}_C &= \sum F_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (3-100)$$

Hai phương trình đầu mô tả chuyển động của khối tâm, còn phương trình cuối cùng mô tả chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục tịnh tiến cùng với khối tâm.

Nếu biết quỹ đạo khối tâm C, có bán kính cong ρ_C thì các phương trình (3-99) có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} Ma_C^t &= \sum F_{kt} \\ M \frac{v_C^2}{\rho_C} &= \sum F_{kn} \\ I_C \bar{\varepsilon} &= \sum m_C (\bar{F}_k) \end{aligned} \right\} \quad (3-101)$$

Trong đó a_C^t và F_{kt} - hình chiếu lên phương tiếp tuyến quỹ đạo của gia tốc $\bar{a}_C$ và lực $\bar{F}_k$ tương ứng; F_{kn} - hình chiếu của lực $\bar{F}_k$ lên phương pháp tuyến của quỹ đạo khối tâm; v_C - vận tốc khối tâm.

Chú ý: Phương trình thứ 3 trong (3-100) còn đúng khi thay khối tâm C bằng tâm vận tốc tức thời P của hình phẳng trong điều kiện $|PC| = \text{const}$, tức $I_P \bar{\varepsilon} = \sum m_p (\bar{F}_k)$ với điều kiện $|\bar{CP}| = \text{const}$. Từ phương trình này dễ dàng nhận ra phương trình (3-95).

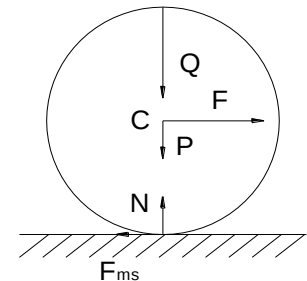
Ví dụ 3-9: Trục bánh xe bị dẫn của một ô tô chạy trên đường thẳng nằm ngang chịu tác dụng của lực nằm ngang $\bar{F}$ và lực thẳng đứng $\bar{Q}$. Bánh xe có trọng lượng P, bán kính R và khối tâm trùng với trục quay riêng C. Bán kính quán tính của bánh xe đối với trục quay riêng bằng ρ . Tìm điều kiện để bánh xe lăn không trượt. Cho hệ số ma sát tĩnh bằng f và bỏ qua ngẫu lực ma sát lăn.

Giải

Khảo sát chuyển động song phẳng của bánh xe trong mặt phẳng thẳng đứng. Các lực tác dụng lên bánh xe gồm tải trọng thẳng đứng $\bar{Q}$, lực đẩy ngang $\bar{F}$, trọng lượng bánh xe $\bar{P}$, phản lực pháp tuyến $\bar{N}$ của mặt đường và lực ma sát trượt $\bar{F}_{ms}$ (hình 3-42).

Viết phương trình vi phân chuyển động cho bánh xe ô tô:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_C &= F - F_{ms} \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_C &= N - P - Q \\ I_C \ddot{\varphi} &= -F_{ms} R \end{aligned}$$



Hình 3-42

Vì điểm C chạy thẳng: $y_C = R \Rightarrow \ddot{y}_C = 0$, còn bánh xe lăn không trượt nên tiếp điểm của bánh xe và đường là tâm vận tốc tức thời:

$$\bar{v}_C = -R\bar{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_C = -R\ddot{\varphi}$$

Với
$$I_C = \frac{P}{g} \rho^2$$

$$\Rightarrow F_{ms} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + R^2} F; \quad N = P + Q$$

Điều kiện bánh xe lăn không trượt là $F_{ms} \leq fN$

$$\text{Vậy } \frac{\rho^2}{\rho^2 + R^2} F \leq f(P + Q)$$

Từ đó tìm được điều kiện để bánh xe lăn không trượt là:

$$F \leq f \frac{\rho^2 + R}{\rho^2} F(P + Q)$$

3.4.4. Phương trình vi phân chuyển động cơ hệ và phương trình Lagrange loại II.

Để khảo sát các hệ vật rắn có thể sử dụng phương trình vi phân chuyển động cơ hệ dạng phương trình Lagrange loại II.

Khảo sát cơ hệ chịu liên kết hình học và lí tưởng có n bậc tự do. Vị trí của cơ hệ được xác định bằng n tọa độ suy rộng đủ: $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Giả sử các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, và các lực liên kết $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N$.

Theo nguyên lí Đalămbe ta có:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \dots, \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0 \quad (3-102)$$

Vì lực suy rộng của các lực liên kết lí tưởng triệt tiêu, nên điều kiện cân bằng của hệ lực (3-102) cho ta:

$$Q_i^F + Q_i^{qt} = 0; i=1,2,\dots,n \quad (3-103)$$

$$\text{Có thể chứng minh rằng } Q_i^{qt} = - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]$$

Trong đó T là biểu thức động năng cơ hệ tính qua các tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Còn Q_i^F là lực suy rộng của các lực hoạt động.

Phương trình (3-103) cho ta:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,n) \quad (3-104)$$

Phương trình (3-104) gọi là phương trình Lagrange loại II, mô tả chuyển động của cơ hệ.

Nếu các lực hoạt động gồm các lực có thế với hàm thế năng Π và các lực hoạt động không thể có lực suy rộng tương ứng Q_i^* thì phương trình Lagrange loại II được viết như sau:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (i=1,n) \quad (3-105)$$

Ví dụ 3-10: Một máy có sơ đồ gồm hai trục I và II nối với nhau bằng khâu đàn hồi có độ cứng chống xoắn là c . Trục I có mô men quán tính đối với trục quay bằng I_0 , chịu tác dụng ngẫu lực có mô men M_d (mô men động cơ), còn trục II có mô men quán tính đối với

trục quay bằng I, chịu tác dụng ngẫu lực có mô men cân M_C . Các khối tâm trục nằm trên đường tâm trục. Bỏ qua khối lượng khâu đàn hồi và ma sát (hình 3-43).

Giải

Khảo sát cơ hệ gồm hai trục, nối với nhau bằng khâu đàn hồi. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng là các góc định vị θ của trục I và góc định vị φ của trục II: $q_1=\theta$; $q_2=\varphi$.

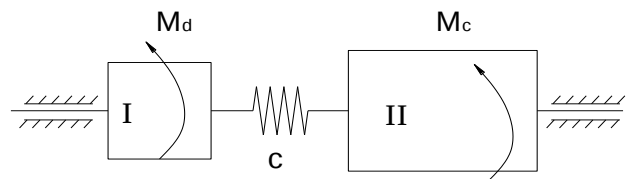
Phương trình Lagrange loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + Q_{\theta}^* ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_{\varphi}^*$$

Gọi T là động năng của cơ hệ:

$$T=T_1+T_2$$

Trong đó T_1 và T_2 lần lượt là động năng trục I và trục II, tính theo động năng vật quay:



Hình 3-43

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 \quad (a)$$

Thế năng được gây nên do có góc xoắn tương đối giữa hai trục bằng $\theta-\varphi$:

$$\text{Vậy} \quad \Pi = \frac{1}{2} c(\theta - \varphi)^2 \quad (b)$$

Các lực suy rộng ứng với các lực không thế là M_d và M_c :

$$Q_{\theta}^* = M_d ; \quad Q_{\varphi}^* = M_c \quad (c)$$

Thay (a), (b), (c) vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của máy là:

$$I_0 \ddot{\theta} = -c(\theta - \varphi) + M_d$$

$$I_0 \ddot{\varphi} = -c(\theta - \varphi) + M_c$$

3.5. ĐỘNG LỰC HỌC MÁY.

3.5.1. Các khái niệm.

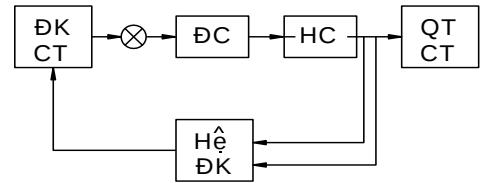
3.5.1.1. Máy.

Trong sản xuất cần thực hiện các công việc khác nhau. Các công việc này được gọi là quá trình công tác. Đó là quá trình công nghệ nhằm biến các nguyên vật liệu thành các thành phẩm; quá trình vận chuyển để di chuyển các nguyên vật liệu và bán thành phẩm đến địa điểm gia công tiếp theo, các thành phẩm đến nơi tiêu thụ, quá trình biến đổi năng lượng từ dạng này sang dạng khác, quá trình thông tin (tư liệu, tài liệu kỹ thuật, bản vẽ ...), quá trình điều khiển. Các quá trình này được thực hiện nhờ các chuyển động cơ học bằng tay hoặc bằng máy.

Máy là một hệ thống dùng để thực hiện các chuyển động cơ học của quá trình công tác. Tùy thuộc đặc thù của quá trình công tác máy được chia thành máy công nghệ, máy vận chuyển, máy năng lượng và máy thông tin...

3.5.1.2. Thiết bị và dụng cụ.

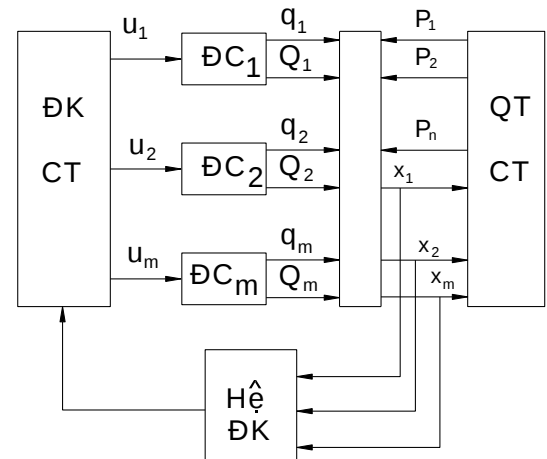
Thiết bị và dụng cụ cùng tham gia với máy để thực hiện các quá trình công tác nhưng không trực tiếp liên hệ với các chuyển động cơ học. Ví dụ: các thiết bị để thực hiện các quá trình nhiệt, hóa, biến đổi và truyền tín hiệu...



Hình 3-34

3.5.1.3. Sơ đồ cấu trúc máy.

Máy là một hệ thống phức tạp gồm nhiều hệ con như động cơ, cơ cấu truyền động, hệ điều khiển... Máy gồm tổ hợp các hệ con được gọi là tổ hợp máy. Có máy tổ hợp một động cơ (hình 3-44) và máy tổ hợp nhiều động cơ (hình 3-45).



Hình 3-45

Để máy có thể thích ứng với các quá trình công tác khác nhau, hoặc với những biến động của chúng do các nguyên nhân khác nhau, người ta dùng hệ thống điều khiển hoạt động nhờ các tham số điều khiển u_i ($i=1.2.3.\dots$). Máy không điều khiển, hoạt động ứng với các giá trị không đổi của các tham số điều khiển $u_i=u_i^0=\text{const}$. Các bộ phận chủ yếu của máy là động cơ, hệ cơ nối với nhau bằng cơ cấu truyền động, gọi tắt là cơ cấu truyền.

3.5.1.4. Các bộ phận của mô hình máy hai khối lượng.

Dưới đây ta khảo sát máy trong mô hình đơn giản nhất là máy hai khối lượng, nó gồm các bộ phận sau:

a. Động cơ là bộ phận dùng để biến đổi các dạng năng lượng như động cơ điện, động cơ nhiệt, động cơ thủy lực, động cơ khí ép. Quá trình biến đổi năng lượng được điều khiển nhờ các thông số vào của động cơ u (hình 3-44 và hình 3-45) được gọi là tham số điều khiển. Trong động cơ điện tham số điều khiển là thế hiệu (trong các động cơ điện một chiều), tần số của thế (trong các động cơ xoay chiều); lưu lượng trong động cơ thủy lực; lượng nhiên liệu trong động cơ nhiệt. Thông số ra của động cơ thường là tọa độ khâu ra của động cơ: khâu quay hoặc khâu tịnh tiến. Mô hình cơ học của động cơ được xây dựng bằng cách thiết lập mối quan hệ giữa các thông số đầu ra: tọa độ q và vận tốc $\dot{q}$ của đầu ra và lực động cơ truyền đi Q , gọi là lực phát động của động cơ (là lực phát động khi đầu ra là khâu tịnh tiến và mô men phát động khi đầu ra là khâu quay). Ta chỉ nghiên cứu hai mô hình “Động cơ có đặc trưng động học lí tưởng” và “Động cơ có đặc trưng tĩnh”.

- Động cơ có đặc trưng động học lí tưởng: Đối với động cơ này quan hệ giữa thông số đầu ra và đầu vào của động cơ có dạng:

$$\dot{q} = f(u) \quad (3-106)$$

Đối với loại động cơ không điều khiển, $u=u_0=\text{const}$ thì:

$$\dot{q} = f(u_0) = \dot{q}_0 = \text{const} \quad (3-107)$$

Tức là đầu ra của động cơ chuyển động đều (ví dụ: quay đều ở loại động cơ điện).

Nếu các tham số điều khiển không thể khống chế chặt chẽ được ở chế độ không đổi u_0 , tức các tham số bị lệch đi đối với chế độ hằng u_0 với lượng bé thì ta có thể sử dụng quan hệ:

$$\dot{q} = f(u_o) + \frac{df}{du}(u_o)(u - u_o) \quad (3-108)$$

Phương trình (3-108) được gọi là dạng tuyến tính hóa của phương trình (3-106).

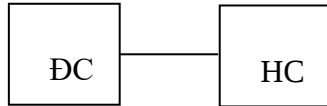
b. *Hệ cơ (cơ cấu chấp hành):* gồm các khâu nối với nhau bằng các khớp với các giả thiết sau:

- Các khâu thể rắn được xem là tuyệt đối rắn; các khâu mềm (ví dụ: đai truyền, xích, dây cáp...) được xem là không dẫn, các khâu thể lỏng được xem là không bị nén.
- Các khớp được xem là thực hiện chính xác các phương trình liên kết (không khe hở), tiếp xúc theo bề mặt của khớp cao cấp không bị biến dạng. Nói khác đi các khớp được xem là các liên kết hình học dạng (3-15).

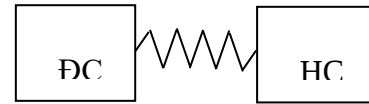
c. *Cơ cấu truyền:*

Là bộ phận truyền động từ động cơ sang hệ cơ để cơ nhận được vận tốc thích hợp.

Cơ cấu truyền động gồm các khâu được nối với nhau bằng các khớp. Trong mô hình máy hai khối lượng cơ cấu truyền được mô hình bằng một thanh cứng không khối lượng hoặc bằng một yếu tố đàn hồi không khối lượng có độ cứng C. Trường hợp đầu, máy được gọi là máy cứng (hình 3-46), trường hợp thứ hai, máy được gọi là máy mềm (hình 3-47).



Hình 3-46



Hình 3-47

3.5.2. Động lực học của máy một động cơ.

Sơ đồ máy như hình 3-36, máy có một bậc tự do. Để khảo sát chuyển động của máy ta sử dụng phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (3-119)$$

Trong đó: T là động năng của máy; q - tọa độ suy rộng của máy có thể được chọn là tọa độ khâu ra của động cơ; Q - lực suy rộng của các lực tác dụng lên máy.

Để đơn giản ta khảo sát trường hợp máy với động cơ có khâu ra là khâu quay.

3.5.2.1. Mô men quán tính thu gọn của máy.

Biểu thức động năng của máy được tính theo công thức động năng cơ hệ:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

Vì máy là cơ hệ có một bậc tự do với tọa độ suy rộng đủ q, nên

$$x_k = x_k(q); \quad y_k = y_k(q); \quad z_k = z_k(q)$$

Do đó:

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dx_k}{dq}(q) \dot{q}$$

Một cách tương tự ta có:

$$\dot{y}_k = \frac{dy_k}{dt}(q) \dot{q}; \quad \dot{z}_k = \frac{dz_k}{dt}(q) \dot{q}$$

Biểu thức có động năng của máy sẽ là:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k \left\{ \left[\frac{dx_k}{dt}(q) \right]^2 + \left[\frac{dy_k}{dt}(q) \right]^2 + \left[\frac{dz_k}{dt}(q) \right]^2 \right\} \dot{q}^2$$

$$T = \frac{1}{2} I(q) \dot{q}^2 \quad (3-120)$$

Trong đó:

$$I(q) = \sum m_k \left\{ \left[\frac{dx_k}{dt}(q) \right]^2 + \left[\frac{dy_k}{dt}(q) \right]^2 + \left[\frac{dz_k}{dt}(q) \right]^2 \right\}$$

$I(q)$ được gọi là mô men quán tính của máy thu gọn về trục động cơ, gọi tắt là mô men quán tính thu gọn. Đó là hàm của tọa độ khâu ra của động cơ và là hàm tuần hoàn vì sau khi trục động cơ quay được một số vòng thì các khâu của máy lại trở về vị trí xuất phát. Ta giả thiết rằng, chu kì của máy ứng với một vòng quay của động cơ. Để thuận tiện ta biểu diễn mô men quán tính thu gọn của máy trong dạng sau:

$$I(q) = I_o + \tilde{I} \quad (3-121)$$

Trong đó
$$I_o = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I(q) dq = \text{const} \quad (3-122)$$

I_o được gọi là giá trị trung bình mô men quán tính thu gọn của máy trong một chu kì.

$$\tilde{I}(q) = I(q) - I_o = I(q) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(q) dq \quad (3-123)$$

$\tilde{I}(q)$ là thành phần biến đổi của mô men quán tính thu gọn của máy. Đó là độ lệch của mô men quán tính thu gọn của máy đối với giá trị trung bình của nó. Giá trị trung bình trong một chu kì của thành phần biến đổi này bằng không.

3.5.2.4. Các chế độ làm việc của máy.

Quá trình làm việc của máy thường có ba giai đoạn:

a. Quá trình mở máy.

Máy từ trạng thái đứng yên được đưa vào trạng thái làm việc. Quá trình này tương ứng với sự thay đổi vận tốc góc từ $\omega=0$ đến giá trị $\omega=\omega_0$ (nếu chế độ làm việc là quay đều).

Quá trình này xảy ra trong thời gian rất ngắn.

b. Quá trình làm việc.

Là quá trình máy thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác. Quá trình này chiếm khoảng thời gian dài nhất trong chu trình làm việc của máy.

c. Quá trình tắt máy.

Máy được đưa từ trạng thái làm việc về trạng thái yên nghỉ. Quá trình này tương ứng với sự thay đổi vận tốc góc từ giá trị ω_0 (khi máy quay đều trong quá trình làm việc) đến giá trị không. Quá trình này cũng xảy ra trong thời gian ngắn.

Quá trình mở máy và quá trình tắt máy thuộc vào quá trình chuyển tiếp là quá trình trong đó các thông số trạng thái thay đổi đáng kể trong khoảng thời gian ngắn. Quá trình làm việc trong khoảng thời gian dài các thông số trạng thái hoặc không thay đổi hoặc thay đổi ít được gọi là quá trình bình ổn. Đây là quá trình quan trọng nhất trong chu trình làm việc của máy. Đặc trưng của quá trình bình ổn của máy sẽ là:

- + Các thông số điều khiển nhận các giá trị xác định:

$$u_i = u_i^o = \text{const}$$

- + $\omega = \omega_0$ hoặc $\omega = \omega_0 + \dot{\psi}$ với $|\dot{\psi}|_{\max} \ll \omega_0 = \text{const}$ (3-132)

3.5.3. Hiệu suất.

3.5.3.1. Định nghĩa hiệu suất.

Trong giai đoạn chuyển động bình ổn của máy, ngoài lực phát động do máy phát ra còn có lực cản có ích tiêu hao vào việc thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác và lực cản vô ích không tránh khỏi như lực ma sát trong các khớp. Gọi công của các lực đó trong một chu kì làm việc của máy là công động A_d công cản có ích A_c^i và công cản vô ích A_c^v .

Theo định lí biến thiên động năng (định lí 3-) ta có:

$$T_2 - T_1 = A_d - A_c^i - A_c^v \quad (3-133)$$

Trong đó: T_1 và T_2 là giá trị động năng của máy ứng với thời điểm đầu và cuối cả một chu kì làm việc của máy.

Vì sau một chu kì làm việc máy trở lại vị trí xuất phát nên $T_1 = T_2$ tức $T_2 - T_1 = 0$. Do đó (3-133) cho ta:

$$A_d - A_c^i - A_c^v = 0$$

$$\text{Vậy} \quad A_d = A_c^i + A_c^v \quad (3-134)$$

Như vậy toàn bộ công động do động cơ cung cấp trong một chu kì tiêu hao một phần vào việc thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác và một phần để thắng công cản vô ích. Phần sau là điều không mong muốn. Do đó, phần công vô ích càng bé càng tốt. Vì lí do đó người ta đưa vào một chỉ số đánh giá chất lượng của máy:

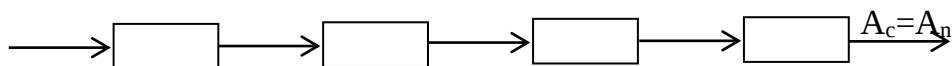
$$\theta = \frac{A_c^i}{A_c^v} < 1 \quad (3-135)$$

θ gọi là hiệu suất của máy. Hiệu suất càng lớn máy được đánh giá càng tốt.

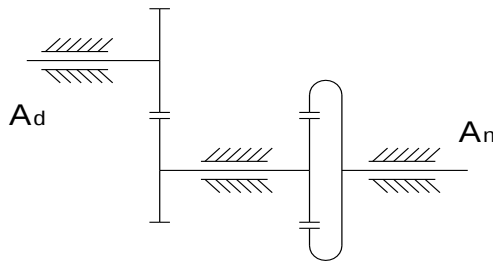
Khái niệm hiệu suất được sử dụng trong ý nghĩa rộng rãi. Đó là tỉ số giữa lượng được sử dụng có ích và lượng được cung cấp để thực hiện một công việc nào đó. Trong lĩnh vực khảo sát một động lực ta có hiệu suất cơ cấu, hiệu suất của một phần tử, hiệu suất của dây các phần tử nối tiếp...

3.5.3.2. Hiệu suất của các phần tử tiếp nối.

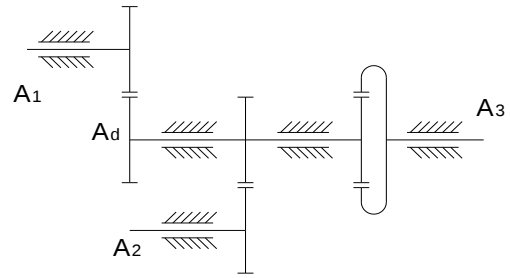
Khảo sát dây các phần tử nối tiếp: công phát ra của các phần tử đứng trước là công nhận vào của phần tử đứng tiếp sau (hình 3-48). Cơ cấu bánh răng (hình 3-49) là một ví dụ về dây phần tử nối tiếp.



Hình 3-48



Hình 3-49



Hình 3-40

Gọi θ_i là hiệu suất của phần tử thứ i và θ là hiệu suất của toàn dây:

$$\theta_i = \frac{A_{i-1}}{A_i}; \theta = \frac{A_c}{A_d}$$

Trong đó A_d là công đưa vào phần tử đầu vào A_c là công phát ra của phần tử cuối.

Dựa vào định nghĩa nêu trên, ta có thể viết:

$$\theta = \frac{A_c}{A_d} = \frac{A_1}{A_d} \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \frac{A_{s+1}}{A_s} \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

$$\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \dots \theta_n = \prod_{i=1}^n \theta_i \quad (3-136)$$

Như vậy, hiệu suất của một dây phần tử nối tiếp bằng tích hiệu suất của các phần tử trong dây.

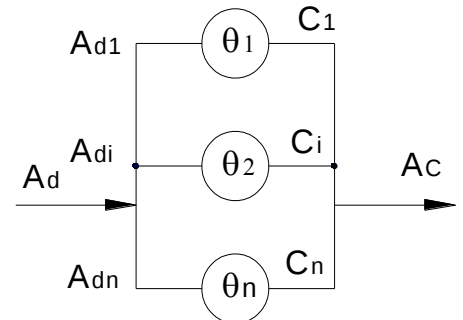
3.5.3.3. Hiệu suất của các phần tử nối song song.

Dây phần tử song song là một dây gồm các phần tử mà mỗi phần tử đều nhận công từ một phần tử gốc không qua bất kì phần tử nào. Gọi θ_i là hiệu suất của phần tử thứ i và θ là hiệu suất của dây (hình 3-40, 3-41)

$$\theta_i = \frac{A_i}{A_{di}}; \theta = \frac{A_c}{A_d}$$

$$\text{Vì} \quad A_d = \sum A_{di} = \sum \frac{A_{ci}}{\theta_i}; \quad A_c = \sum A_{ci}$$

$$\text{Nên:} \quad \theta = \frac{A_c}{A_d} = \frac{\sum A_{ci}}{\sum \frac{A_{ci}}{\theta_i}} \quad (3-137)$$



Hình 3-41

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Các định luật về động lực học. Hai bài toán cơ bản của động lực học?
- 2.

Chương 4

SỨC BỀN VẬT LIỆU

Sức bền vật liệu đưa ra phương pháp tính toán độ bền, độ cứng và độ ổn định của vật rắn thực (vật rắn biến dạng) dưới tác dụng của lực

4.1. MỞ ĐẦU.

4.1.1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học.

Trong ba phần trên ta đã nghiên cứu các quy luật về chuyển động cơ học của các vật thể trong không gian theo thời gian. Các vật thể được xây dựng dưới dạng các mô hình: chất điểm, cơ hệ và một dạng rất quan trọng đó là vật rắn tuyệt đối.

Trong ngành chế tạo máy hoặc trong các công trình, các vật liệu như thép, gang, bê tông ... là các vật rắn thực (hay còn gọi là vật rắn biến dạng). Nghĩa là vật thể sẽ biến dạng, bị phá hủy dưới tác dụng của ngoại lực, nhiệt độ.

Khi thiết kế các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy ta phải bảo đảm:

- Chi tiết không bị phá hỏng tức là đủ bền.
- Chi tiết không bị biến dạng quá lớn tức là đủ bền.
- Chi tiết luôn giữ được hình dạng ban đầu tức là đảm bảo điều kiện ổn định.

Chương sức bền vật liệu có nhiệm vụ đưa ra các phương pháp tính toán về độ bền, độ cứng và độ ổn định của các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy.

Đối tượng nghiên cứu của môn sức bền vật liệu là các vật rắn biến dạng chủ yếu là các thanh.

4.1.2. Các khái niệm về thanh.

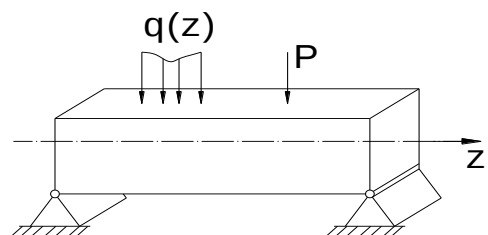
- Thanh là vật thể có kích thước theo hai phương nhỏ so với phương thứ ba.
- Tấm và vỏ là những vật thể có kích thước theo phương rất lớn so với phương thứ ba.
- Khối là vật thể có kích thước theo ba phương cùng tương đương nhau. Thanh là đối tượng nghiên cứu của môn sức bền vật liệu theo quan điểm truyền thống.

4.1.3. Nội lực- Ứng suất.

4.1.3.1. Ngoại lực.

Những lực tác động từ môi trường bên ngoài hay từ các vật khác lên vật thể đang xét gọi là ngoại lực. Ngoại lực bao gồm tải trọng tác động và phản lực tại các liên kết (hình 4-1).

- Tải trọng tác động gồm:
 - + Lực tập trung: là lực tác dụng trên một diện tích truyền lực bé, có thể coi là một điểm trên vật (lực P).
 - + Lực phân bố: là lực tác dụng trên một đoạn dài hay trên một diện tích truyền lực đáng kể của vật.
- Phản lực liên kết: là lực phát sinh nơi tiếp xúc giữa vật thể đang xét với vật thể khác.

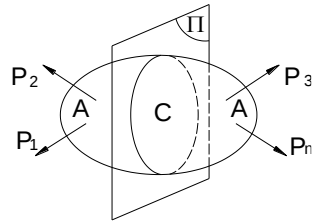


Hình 4-1

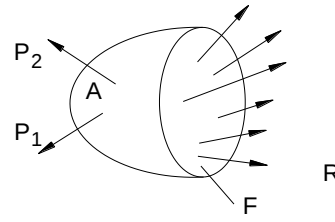
4.1.3.2. Nội lực.

Dưới tác động của ngoại lực, vật thể biến dạng, các lực liên kết giữa các phân tử của vật tăng lên để chống lại sự biến dạng của vật. Độ tăng của lực liên kết chống lại sự biến dạng của vật gọi là nội lực. Nếu tăng dần ngoại lực thì nội lực cũng tăng dần để cân bằng với ngoại lực. Tùy từng loại vật liệu, nội lực chỉ tăng đến một giới hạn nhất định. Nếu tăng ngoại lực quá lớn, nội lực không đủ sức chống lại, vật sẽ bị phá hỏng.

Muốn xác định nội lực ta dùng phương pháp mặt cắt. Xét vật thể chịu lực ở trạng thái cân bằng (hình 4-2). Để tìm nội lực tại một điểm C nào đó ta tưởng tượng dùng một phẳng π qua C cắt vật thể ra làm hai phần A và B. Ta xét một phần nào đó, ví dụ phần A (hình 4-3). Phần A cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực tác động lên nó (P_1, P_2) và hệ lực tương hỗ phân bố trên mặt cắt π tác động từ phần B lên phần A, hệ lực đó chính là nội lực trên mặt cắt π . Từ đó ta có thể xác định được nội lực qua giá trị của ngoại lực ở phần A.



Hình 4-2



Hình 4-3

4.1.3.3. Ứng suất.

Cường độ của nội lực tại một điểm nào đó trên mặt π được gọi là ứng suất. Kí hiệu P_π - chữ π chỉ pháp tuyến của mặt π . Chẳng hạn, đối với điểm C nào đó, ta lấy một diện tích ΔF chứa C. Trên ΔF có nội lực phân bố với hợp lực có véc-tơ $\Delta \vec{P}$ (hình 4-4).

Tỉ số giữa $\Delta \vec{P}$ với ΔF là một véc-tơ cùng chiều với $\Delta \vec{P}$ kí hiệu là $\vec{p}_{tb}$:

$$\vec{p}_{tb} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F}$$

$\vec{p}_{tb}$ được gọi là ứng suất trung bình tại điểm C.

Nếu cho ΔF tiến đến không thì $\vec{p}_{tb}$ tiến đến một giới hạn. Giới hạn đó được gọi là ứng suất toàn phần tại điểm C, kí hiệu $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F}$$

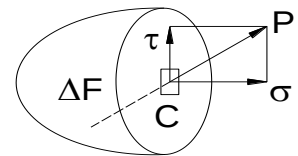
Thứ nguyên của ứng suất là *lực/(chiều dài)²*; đơn vị thường dùng là $kN/cm^2, MN/cm^2$. Trong tính toán ta thường phân ứng suất toàn phần ra làm hai thành phần (hình 4-4):

- Thành phần vuông góc với mặt cắt được gọi là ứng suất pháp, kí hiệu σ .

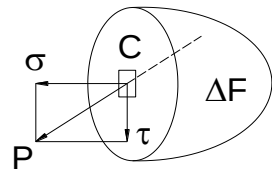
- Thành phần nằm trong mặt cắt gọi là ứng suất tiếp, kí hiệu τ .

Như vậy: $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

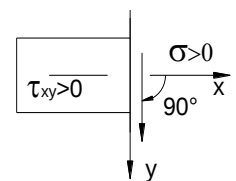
Những điều vừa phân tích ở trên đối với phần A cũng làm tương tự cho phần B. Theo nguyên lí tác dụng và phản tác dụng, ứng suất tại mỗi



Hình 4-4



Hình 4-5

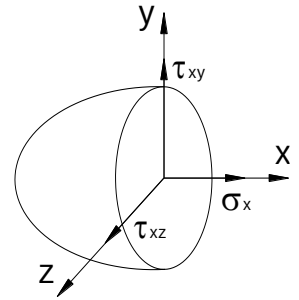


Hình 4-6

điểm trên phần B sẽ có cùng trị số, cùng phương nhưng ngược chiều với ứng suất tại điểm tương ứng trên phần A (hình 4-5).

Từ nay về sau ta quy ước về dấu và cách viết các ứng suất như sau:

- Ứng suất pháp được coi là dương khi véc-tơ biểu diễn có chiều cùng với chiều dương của pháp tuyến ngoài mặt cắt. Ứng suất pháp kèm theo một số chỉ số chiều của pháp tuyến, ví dụ σ_x .
- Ứng suất tiếp được coi là dương khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt quay một góc 90° theo chiều quay của kim đồng hồ, sẽ trùng với chiều của ứng suất tiếp (hình 4-6).
- Ứng suất tiếp kèm theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất chỉ chiều pháp tuyến ngoài mặt cắt, chỉ số thứ hai chỉ chiều ứng suất tiếp song song, ví dụ τ_{xy} , τ_{xz} (hình 4-7).



Hình 4-7

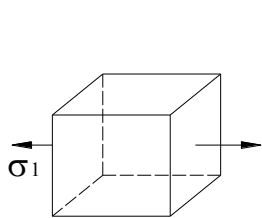
4.1.3.4. Trạng thái ứng suất.

Nếu qua C xét các mặt cắt khác nhau thì tương ứng với mỗi vị trí của mặt cắt π ta được một véc-tơ ứng suất $\vec{p}$ có giá trị khác nhau. Tập hợp mọi véc-tơ ứng suất $\vec{p}$, ứng với tất cả các mặt cắt qua C, được gọi là trạng thái ứng suất tại điểm C.

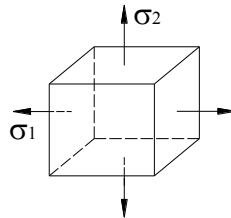
Người ta chứng minh được rằng, qua một điểm ta luôn tìm được ba mặt cắt vuông góc với nhau. Trên ba mặt cắt đó thành phần ứng suất tiếp bằng không. Các mặt đó được gọi là các mặt cắt chính. Ứng suất pháp trên mặt cắt đó gọi là ứng suất chính.

Đối với ba mặt chính đó xảy ra ba trường hợp:

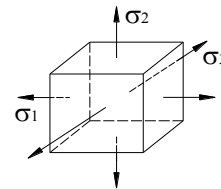
- Trạng thái ứng suất đơn: Trên một mặt chính có ứng suất pháp, trên hai mặt chính còn lại ứng suất pháp bằng không (hình 4-8).



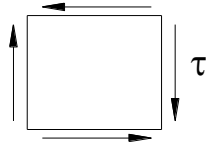
Hình 4-8



Hình 4-9



Hình 4-10



Hình 4-11

- Trạng thái ứng suất phẳng: Trên hai mặt chính có ứng suất pháp, trên một mặt chính ứng suất pháp bằng không (hình 4-9).

- Trạng thái ứng suất khối: Trên ba mặt chính đều có ứng suất pháp (hình 4-10).

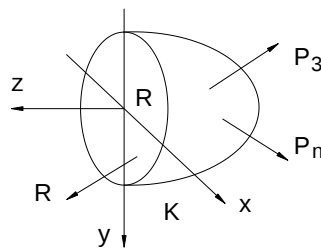
Các ứng suất chính được quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (về giá trị đại số). Trường hợp đặc biệt trạng thái ứng suất phẳng ta tìm được hai phẳng vuông góc, trên hai mặt đó chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp (hình 4-11). Ta gọi trạng thái ứng suất đó là trạng thái trượt thuần túy.

4.1.4. Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang.

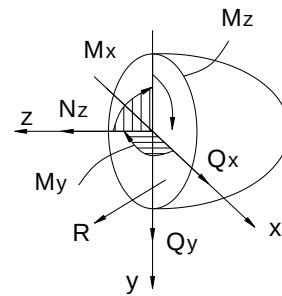
Giá trị ứng suất tại một điểm, quy luật phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang ta chưa tính được, nhưng ta có thể xác định được hợp lực của hệ nội lực vì nó phải cân bằng với hợp lực của ngoại lực tác dụng lên phần đang xét. Giả sử xét sự cân bằng của phần phải, hợp lực của hệ nội lực đặc trưng cho tác dụng của phần trái lên phần phải được biểu diễn bằng véc-tơ $\vec{R}$ đặt tại một điểm K nào đó (hình 4-12). Thu gọn hợp lực $\vec{R}$ về trọng tâm O của mặt cắt ngang, ta sẽ được lực $\vec{R}$ có véc-tơ lực bằng $\vec{R}$ và một ngẫu lực có mô men $\vec{M}$

(véc-tơ chính và mô men chính của hệ nội lực). Nói chung, lực $\vec{R}$ và mô men $\vec{M}$ có phương chiều bất kì trong không gian. Để thuận lợi ta phân $\vec{R}$ làm ba thành phần trên hệ trục tọa độ vuông góc chọn như hình 4-13.

- Thành phần nằm trên trục z gọi là lực dọc, kí hiệu N_z .
- Thành phần nằm trên các trục x và y trong mặt cắt ngang gọi là lực cắt, kí hiệu Q_x và Q_y . Ngẫu lực M cũng được phân làm ba thành phần:
 - Thành phần mô men quay xung quanh các trục x và y (tác dụng trong các mặt phẳng zOy và zOx vuông góc với mặt cắt ngang) gọi là mô men uốn, kí hiệu là M_x và M_y .
 - Thành phần quay xung quanh trục z (tác dụng trong mặt phẳng của mặt cắt ngang) gọi là mô men xoắn, kí hiệu M_z (hình 4-13).



Hình 4-12



Hình 4-13

N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y và M_z là sáu thành phần nội lực trên mặt cắt ngang. Chúng được xác định từ điều kiện cân bằng của phần đang xét dưới dạng các phương trình.

- Phương trình hình chiếu:

$$N_z + \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0; \quad Q_x + \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad Q_y + \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (4-1)$$

Trong đó: $\sum_{i=1}^n P_{ix}$; $\sum_{i=1}^n P_{iy}$; $\sum_{i=1}^n P_{iz}$ là tổng hình chiếu của các ngoại lực thuộc phần đang xét trên các trục x, y và z tương ứng.

Phương trình mô men:

$$\left. \begin{aligned} M_x + \sum_{i=1}^n m_x(\vec{P}_i) &= 0; \quad M_y + \sum_{i=1}^n m_y(\vec{P}_i) = 0 \\ M_z + \sum_{i=1}^n m_z(\vec{P}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

Trong đó $\sum_{i=1}^n m_x(\vec{P}_i)$; $\sum_{i=1}^n m_y(\vec{P}_i)$; $\sum_{i=1}^n m_z(\vec{P}_i)$ là tổng mô men của tất cả các ngoại lực thuộc phần đang xét đối với các trục x, y, z tương ứng.

Cũng như ứng suất, nội lực tại một mặt cắt ngang bất kì trên phần trái sẽ có cùng trị số, cùng phương nhưng ngược chiều với nội lực tương ứng cũng tại mặt cắt đó trên phần phải. Như vậy, để xác định nội lực tại một mặt cắt ngang bất kì, chúng ta có thể xét phần trái hoặc phần phải, tùy theo phần nào đơn giản hơn.

4.1.5. Quan hệ giữa ứng suất và các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang.

Gọi $\vec{p}$ là ứng suất tại một điểm M(x,y) bất kì trên mặt cắt ngang (hình 4-14). Các thành phần hình chiếu của $\vec{p}$ là:

- Ứng suất pháp σ_z .
- Ứng suất tiếp τ được phân làm hai thành phần: τ_{zx} , τ_{zy} .

Lấy một diện tích phân bố dF bao quanh M. Các lực phân tố do các ứng suất gây ra là: $\sigma_z dF$, $\tau_{zx} dF$, $\tau_{zy} dF$. Tổng cộng tất cả các tác dụng của các lực phân tố đó trên toàn thể mặt cắt, chính là các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang. Từ ý nghĩa đó ta có các biểu thức liên hệ giữa ứng suất và các thành phần nội lực như sau:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF \quad (4-3)$$

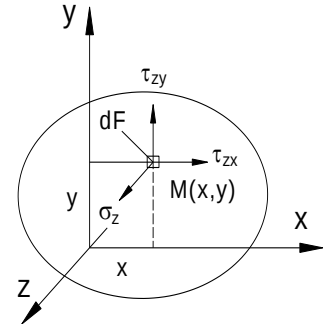
$$M_x = \int_F \sigma_z y dF \quad (4-4)$$

$$M_y = \int_F \sigma_z x dF \quad (4-5)$$

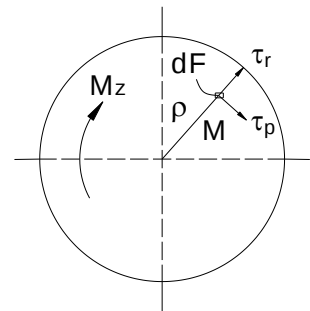
$$Q = \int_F \tau_{zx} x dF \quad (4-6)$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} x dF \quad (4-7)$$

$$M_z = \int_F (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dF \quad (4-8)$$



Hình 4-14



Hình 4-15

Riêng biểu thức liên hệ giữa ứng suất tiếp với mô men xoắn khi mặt cắt ngang tròn tại điểm M ta phân ra làm hai thành phần:

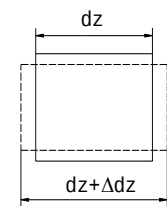
- Một thành phần vuông góc với bán kính, kí hiệu τ_p .
- Một thành phần hướng theo bán kính, kí hiệu τ_r (hình 4-15).

Khi đó ta có công thức liên hệ sau: $M_z = \int_F \rho \tau_p dF \quad (4-9)$

4.1.6. Biến dạng.

4.1.6.1. Biến dạng dài.

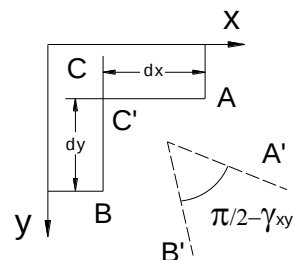
Xét một đoạn thẳng vi phân dz tại điểm C. Sau khi biến dạng, đoạn vi phân dz này dài ra đoạn $dz + \Delta dz$. Ta gọi Δdz là độ dẫn dài tuyệt đối của đoạn dz (hình 4-16). Tỉ số $\Delta dz/dz$ gọi là độ dẫn dài tỉ đối, kí hiệu ϵ_z có một chỉ số phương xét biến dạng.



Hình 4-16

4.1.6.2. Biến dạng góc (biến dạng trượt).

Giả sử trong mặt phẳng Oxy, ta lấy hai đoạn thẳng vi phân dx và dy vuông góc tại C (hình 4-17). Sau khi biến dạng dx và dy trở thành dx' và dy' . Hình chiếu dx' và dy' trên mặt phẳng Oxy không vuông góc với nhau nữa mà hợp với nhau một góc bằng $(\pi/2 - \gamma_{xy})$. Ta gọi γ_{xy} là biến dạng góc trong mặt phẳng xy tại điểm C. Kí hiệu độ biến dạng góc γ kèm theo hai chỉ số chỉ mặt phẳng xét biến dạng góc.



Hình 4-17

4.1.7. Các giả thuyết cơ bản về vật liệu.

4.1.7.1. Tính đàn hồi của vật thể.

Dưới tác dụng của ngoại lực (dù rất nhỏ) hay nhiệt độ ... vật thể đều bị biến dạng. Biến dạng của vật thể lớn hay bé tùy thuộc theo tính chất và giá trị của ngoại lực, tùy theo bản chất và khả năng chịu lực của vật liệu.

Thí nghiệm chứng tỏ rằng, đối với mỗi loại vật liệu, nếu lực tác dụng chưa vượt quá một giới hạn xác định, thì khi bỏ lực, vật thể sẽ trở lại hình dáng và kích thước ban đầu, tức là biến dạng bị mất đi. Ta nói vật thể chỉ bị biến dạng đàn hồi, tính chất đó gọi là tính chất đàn hồi. Những vật thể nào có tính chất như vậy gọi là vật thể đàn hồi hoàn toàn.

Nếu lực tác dụng vượt quá một giới hạn xác định nói trên, thì khi bỏ lực, vật thể không trở lại hình dáng và kích thước ban đầu nữa. Chúng chỉ phục hồi một phần biến dạng ban đầu. Các vật thể này được gọi là vật thể đàn hồi không hoàn toàn (đàn hồi không tuyệt đối).

Phần biến dạng không phục hồi được gọi là biến dạng dư.

4.1.7.2. Các giả thuyết cơ bản về vật liệu.

Giả thuyết 1: Vật liệu có tính chất đồng nhất và đẳng hướng.

Giả thuyết này cho phép nghiên cứu tính chất cơ học, tính chịu lực của vật thể qua một phần tử vô cùng bé tưởng tượng được tách ra khỏi vật thể đó. Và khi tính sức bền, chúng ta chỉ xét tại những nơi nguy hiểm nhất.

Giả thuyết 2: Vật liệu có tính đàn hồi hoàn toàn.

Theo giả thuyết này môn sức bền vật liệu chủ yếu giải quyết các bài toán khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi. Trong miền này, theo định luật Húc (Hook) ta có: biến dạng tại mọi điểm của vật thể tỉ lệ bậc nhất với ứng suất tại điểm đó. Biểu thức toán học của định luật có dạng sau:

- Ở trạng thái ứng suất đơn - kéo dãn theo một trục:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z \quad (4-10)$$

- Ở trạng thái trượt thuần túy - chỉ có biến dạng trượt:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (4-11)$$

Trong đó: E, G - các hệ số tỉ lệ, phụ thuộc vào từng loại vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm, có thứ nguyên là *lực/(chiều dài)²*, đơn vị thường dùng (*kN/cm²*), (*MN/m²*);

E- mô đun đàn hồi khi kéo nén; G- mô đun đàn hồi khi trượt.

4.2. KÉO NÉN ĐÚNG TÂM.

4.2.1. Định nghĩa.

Một thanh được gọi là chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc.

4.2.2. Biểu đồ lực dọc.

Nội lực trong thanh chịu kéo hoặc nén là lực dọc trục N_z vuông góc với mặt cắt.

Biểu đồ lực dọc là đường biểu diễn sự biến thiên của lực dọc dọc theo trục của thanh.



Hình 4-18



Hình 4-19

Quy ước dấu:

- Lực dọc dương khi thanh chịu kéo (hình 4-18).
- Lực dọc âm khi thanh chịu nén (hình 4-19).

Ví dụ 4-1: Vẽ biểu đồ lực dọc của một thanh chịu lực như hình vẽ 4-20

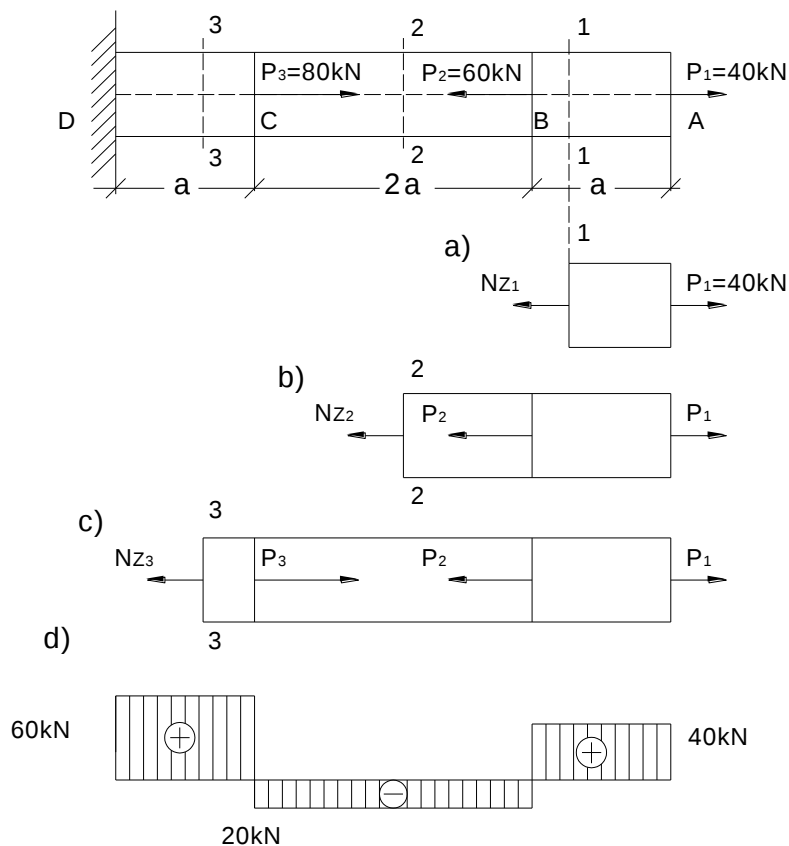
Chia thanh làm 3 đoạn AB, BC, CD.

Xét đoạn AB có giá trị từ $0 < z_1 \leq a$: $\sum Z = N_{z1} - P_1 = 0$ suy ra $N_{z1} = P_1 = 40\text{kN}$

Xét đoạn BC có giá trị từ $a < z_2 \leq 3a$: $\sum Z = N_{z2} - P_1 + P_2 = 0$ suy ra $N_{z2} = -40\text{kN}$

Xét đoạn CD có giá trị từ $3a < z_3 \leq 4a$: suy ra $N_{z3} = 60\text{kN}$.

Biểu đồ lực dọc của thanh được biểu diễn trên hình 4-20

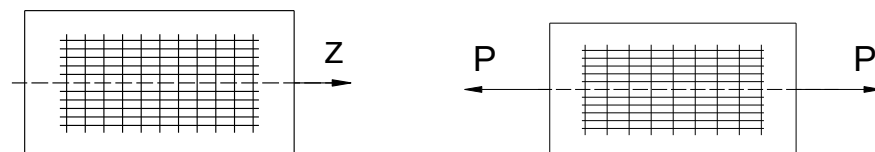


Hình 4-20

4.2.3. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

4.2.3.1. Quát sát một mẫu thí nghiệm chịu kéo.

Mẫu là một thanh lăng trụ, trước khi làm thí nghiệm ta kẻ các đường vạch song song và vuông góc với trục thanh trên bề mặt thanh (hình 4-21). Những vạch vuông góc với trục thanh được xem là vết của mặt cắt ngang. Khi thanh chịu kéo hay nén ta hạn thấy:



Hình 4-21

- Trục thanh vẫn thẳng.

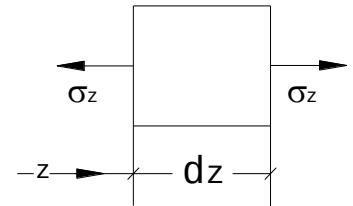
- Những vạch song song với trục thanh vẫn thẳng và song song với trục thanh.
- Những vạch vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với trục thanh, nhưng khoảng cách giữa các vạch đó có sự thay đổi. Khi chịu kéo các vạch cách xa nhau ra, khi chịu nén các vạch sát gần nhau lại.

Từ các nhận xét trên ta thừa nhận hai giả thuyết sau:

- Giả thuyết mặt cắt ngang phẳng (giả thuyết Becnuli): Trong quá trình biến dạng, mặt cắt ngang của thanh luôn luôn là phẳng và vuông góc với trục thanh.
- Giả thuyết về các thớ dọc: Trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không áp lên nhau và cũng không đẩy xa nhau. Theo giả thuyết này ta thừa nhận giữa các thớ dọc với nhau không phát sinh ứng suất pháp ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

Dựa vào hai giả thuyết trên ta thấy: trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có thành phần ứng suất pháp σ_z còn thành phần ứng suất tiếp bằng không.

Tách ra một phân tố bởi hai mặt cắt ngang cách nhau một đoạn dz và các mặt song song với trục thanh (hình 4-22). Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.



Hình 4-22

Theo định luật Húc ta có: $\sigma_z = E\varepsilon_z$ (E : môđun đàn hồi của vật liệu)

Đơn vị: N/m^2 ; MN/m^2 .

Sau khi kéo, trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với nhau nên các thớ đều giãn như nhau. Có nghĩa là mọi điểm đều có độ biến dạng tỉ đối ε_z như nhau. Vậy ứng suất pháp σ_z phân bố trên mặt cắt ngang là đều.

4.2.3.2. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất pháp và lực dọc.

Từ công thức (4-3) ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \sigma_z \int_F dF = \sigma_z F$$

$$\text{Hay } \sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (4-12)$$

Trong đó: N_z - giá trị lực dọc tại mặt cắt đang xét; F - diện tích mặt cắt ngang.

4.2.4. Biến dạng- Tính độ dẫn dài của thanh.

Gọi l là chiều dài ban đầu của thanh, khi chịu kéo thanh dài ra một đoạn Δl . Ngược lại khi chịu nén thanh co lại. Ta gọi Δl là độ dẫn dài tuyệt đối của thanh. Nếu kí hiệu Δdz là độ dẫn dài của một đoạn thanh bất kì có chiều dài ban đầu dz vô cùng bé, ta có:

$$\Delta l = \int_0^1 \Delta dz.$$

Theo định nghĩa $\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$ suy ra $\Delta l = \int_0^1 \varepsilon_z dz$, chú ý đến (4-12) ta nhận được biểu

thức tính độ dẫn dài tuyệt đối của thanh:

$$\Delta l = \int_0^1 \frac{N_z}{EF} dz \quad (4-13)$$

Tích số EF gọi là độ cứng của thanh khi kéo và nén. Nếu hàm dưới dấu tích phân không liên tục suốt chiều l mà chỉ liên tục trong từng đoạn thì biểu thức (5-13) được viết như:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_{zi}}{E_i F_i} dz \quad (4-14)$$

Trong đó: n là số đoạn, l_i chiều dài đoạn thứ i .

Trong trường hợp $N_z/EF = \text{const}$ trên suốt chiều dài l hoặc có trị số không đổi trong từng đoạn, tương ứng với (4-13) (4-14) ta có công thức tính độ biến dạng tuyệt đối của thanh là:

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF} \quad (4-15)$$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} l_i}{E_i F_i} \quad (4-16)$$

Ví dụ 4-2: Tính độ biến dạng dài tuyệt đối của cột có bậc chịu lực. Biết $l_1=50\text{cm}$, $l_2=60\text{cm}$, $l_3=20\text{cm}$, $l_4=60\text{cm}$, $F_1=10\text{cm}^2$, $F_2=20\text{cm}^2$, $E=2.10^4\text{kN/cm}^2$ (hình 4-23)

Giải

Chia thanh làm bốn đoạn AB, BC, CD và DE. Trong mỗi đoạn tỉ số N_z/EF là hằng. Áp dụng công thức (4-16) ta có :

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum_{i=1}^4 \frac{N_{zi} l_i}{E_i F_i} = \frac{N_1 l_1}{E F_1} + \frac{N_2 l_2}{E F_2} + \frac{N_3 l_3}{E F_3} + \frac{N_4 l_4}{E F_4} \\ &= -\frac{2 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{3 \times 60}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{3 \times 20}{2 \times 10^4 \times 20} - \frac{4 \times 60}{2 \times 10^4 \times 20} = -0,5 \times 10^{-4} \text{ cm} \end{aligned}$$

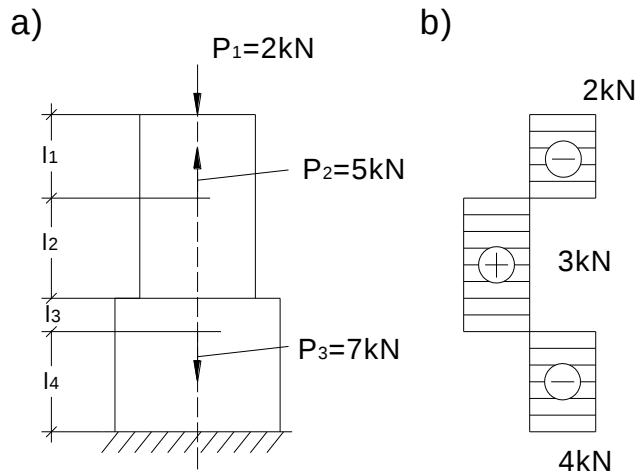
Cột bị co lại.

Ta nhận thấy rằng, khi một thanh chịu kéo thì chiều dài của nó bị giãn dài ra, còn bề ngang bị co lại. Trái lại khi thanh bị nén thì chiều dài bị co lại còn bề ngang thì phình to ra.

Như vậy khi thanh chịu kéo, nén phương ngang cũng bị biến dạng. Giữa biến dạng ngang tỉ đối và biến dạng dọc tỉ đối có liên hệ sau:

$$\varepsilon_{ng} = -\mu \varepsilon_{dọc} \quad (4-17)$$

Trong đó μ là hệ số biến dạng ngang hay hệ số Poatxong. Nó là hằng số phụ thuộc vào từng loại vật liệu và nằm trong giới hạn từ 0 đến 0,5. Dấu “-” trong công thức 4-17 chứng tỏ rằng ε_{ng} và $\varepsilon_{dọc}$ ngược dấu nhau. Bảng 4-1 cho một vài giá trị μ .



Hình 4-23

Bảng 4-1

Vật liệu	μ
Thép	0,25÷0,33
Gang	0,23÷0,27
Đồng	0,31÷0,34
Nhôm	0,32÷0,36

4.2.5. Đặc trưng cơ học của vật liệu.

Để đưa ra lý thuyết tính độ bền, độ cứng của thanh trước hết ta cần nghiên cứu đặc trưng cơ học của vật liệu. Muốn hiểu rõ tính chất của cơ học của vật liệu ta thường làm các thí nghiệm để quan sát các tính chất và quá trình biến dạng của các loại vật liệu khác nhau kể từ lúc bắt đầu chịu tải cho đến khi bị phá hỏng.

Vật liệu trong tự nhiên là đa dạng, nhưng căn cứ vào biến dạng của mẫu thí nghiệm cho tới khi mẫu bị phá hỏng ta có thể chia vật liệu ra làm hai loại:

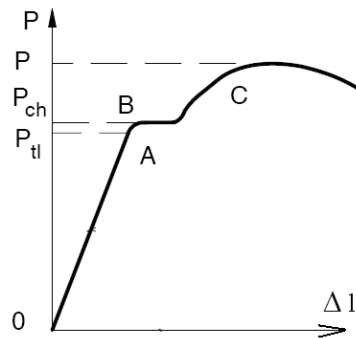
- Vật liệu dẻo là những vật liệu bị phá hoại sau khi đã biến dạng lớn, ví dụ như thép, đồng, nhôm,...
- Vật liệu giòn là những vật liệu bị phá hủy ngay khi biến dạng còn rất ít, ví dụ như gang, đá, bê tông,...

Trước hết ta làm thí nghiệm kéo và nén. Thí nghiệm được tiến hành trên các máy thử kéo- nén. Các mẫu thí nghiệm, qui trình thí nghiệm và các phương pháp xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu đều được tiêu chuẩn hóa theo TCVN.

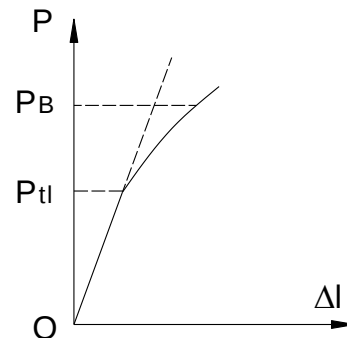
4.2.5.1. Thí nghiệm kéo.

Trên hình 4-24 biểu diễn đồ thị của mẫu kéo bằng thép CT-3, còn trên hình 4-25 biểu diễn đồ thị của mẫu kéo bằng gang. Ký hiệu P là trị số lực kéo, Δl là độ giãn dài của mẫu thí nghiệm. Đối với thép CT-3 đồ thị liên hệ giữa lực và độ biến dạng có ba giai đoạn cơ bản sau:

- Giai đoạn đàn hồi được biểu diễn bằng đoạn đường thẳng OA và đoạn đường cong AB. Đoạn đường thẳng OA được gọi là giai đoạn đàn hồi tuyến tính hay giai đoạn tỉ lệ. Trong giai đoạn này sự liên hệ giữa lực kéo P và độ giãn dài tuyệt đối có quan hệ bậc nhất. Vật liệu làm việc tuân theo định luật Húc. Đoạn AB rất bé được gọi là giai đoạn đàn hồi phi tuyến. Vật liệu làm việc không tuân theo định luật Húc.



Hình 4-24



Hình 4-25

- Giai đoạn chảy được biểu diễn bằng đoạn BC trên đồ thị hình 4-24. Đặc điểm của giai đoạn này là lực kéo không tăng trong khi biến dạng vẫn tiếp tục tăng.
- Giai đoạn cũng cố: Sau khi qua giai đoạn chảy, lực có tăng khi biến dạng mới tăng nhưng đồ thị biểu diễn sự liên hệ giữa lực kéo P và độ giãn dài tuyệt đối Δl là một đường cong. Ta tiếp tục tăng cho đến khi lực đạt giá trị lớn nhất thì tại một nơi nào đó của mẫu thử, mặt cắt ngang bị thắt lại, sau đó lực giảm dần nhưng mẫu vẫn tiếp tục dài ra cho đến khi đứt ngay tại chỗ thắt.

Kí hiệu:

P_{tl} - lực tỉ lệ ứng với lực kéo lớn nhất trong giai đoạn tỉ lệ.

P_{ch} - lực ứng với lực kéo ở giai đoạn chảy.

P_B - lực ứng với lực kéo lớn nhất ở giai đoạn cũng cố.

F_0 - diện tích mặt cắt ngang của mẫu trước khi thí nghiệm.

l_0 - chiều dài của phần mẫu thí nghiệm trước khi làm thí nghiệm.

F_1 - diện tích mặt cắt ngang của mẫu tại chỗ thắt lúc mẫu bị đứt.

l_1 - chiều dài của phần mẫu thí nghiệm sau khi thí nghiệm.

Người ta gọi các đại lượng sau đây là các đặc trưng cơ học của vật liệu và các đặc trưng này có tính quy ước:

- Giới hạn tỉ lệ, kí hiệu σ_{tl} được xác định bởi tỉ số $\sigma_{tl} = P_{tl}/F_0$.
- Giới hạn chảy, kí hiệu σ_{ch} ; $\sigma_{ch} = P_{ch}/F_0$ đây là một đặc trưng quan trọng của vật liệu dẻo.
- Giới hạn bền, kí hiệu σ_B ; $\sigma_B = P_B/F_0$.
- Độ giãn dài tỉ đối của mẫu sau khi kéo đứt, kí hiệu được tính theo %:

$$\delta\% = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%$$

- Độ thắt tỉ đối sau khi mẫu bị kéo đứt, kí hiệu φ , cũng được tính theo %:

$$\varphi\% = \frac{F_0 - F_1}{F_0}$$

Đối với gang, đồ thị P-Δl là một đường cong ngay khi lực kéo P còn rất thấp. Vật liệu xem như không có giới hạn tỉ lệ và giới hạn chảy mà chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0}$$

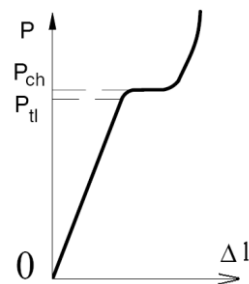
P_B - giá trị lực ứng với mẫu bị đứt. Giới hạn này rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu dẻo. Trong giới hạn chịu lực thông thường một số vật liệu giòn làm việc không sai định luật Húc nên ta có thể thay đoạn đường cong trong giới hạn đó bằng một đoạn thẳng hình 4-25. Như vậy, việc tính toán sẽ đơn giản mà vẫn đảm bảo được độ chính xác cần thiết.

4.2.5.2. Thí nghiệm nén.

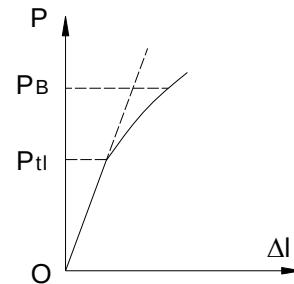
Mẫu thí nghiệm thường là hình trụ hay hình lập phương. Trên hình 4-26 biểu diễn đồ thị nén mẫu thép, còn trên hình 4-27 biểu diễn đồ thị nén mẫu gang.

Đối với thép khi nén chỉ xác định được giới hạn tỉ lệ và giới hạn chảy. Đối với gang thì xác định được giới hạn bền khi nén của gang lớn hơn rất nhiều giới hạn bền khi kéo.

Các đặc trưng cơ học của vật liệu trên thực tế còn phụ thuộc rất nhiều yếu tố như: nhiệt độ, tốc độ biến dạng (liên quan đến tải trọng tĩnh và động), thời gian ... mà ở đây ta chưa kể đến.



Hình 4-26



Hình 4-27

4.2.6. Điều kiện bền.

4.2.6.1. Ứng suất cho phép.

Khi tính sức bền các chi tiết, các kết quả tính toán phải đảm bảo cho chúng không bị phá hỏng. Ví dụ, đối với vật liệu giòn trên nó chưa phát sinh các vết nứt, đối với vật liệu dẻo chưa có biến dạng lớn. Muốn vậy, ứng suất tính toán lớn nhất tại một điểm nào đó trong quá trình chịu lực không được vượt quá một giới hạn quy định cho từng loại vật liệu. Ta gọi đó là ứng suất giới hạn nguy hiểm, kí hiệu σ_0 . Trong bài toán kéo nén đúng tâm, đối với vật liệu giòn ta chọn σ_0 là **giới hạn bền** còn đối với vật liệu dẻo ta chọn σ_0 là **giới hạn chảy** vì khi đạt tới giới hạn đó tuy vật liệu chưa bị phá hỏng nhưng biến dạng đã quá lớn so với biến dạng đàn hồi.

Để đảm bảo an toàn trong thực tế người ta thường sử dụng một giá trị ứng suất bé hơn ứng suất nguy hiểm gọi là ứng suất cho phép, kí hiệu $[\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (4-18)$$

n - hệ số an toàn, có giá trị lớn hơn 1.

Như vậy đối với vật liệu dẻo:

$$[\sigma]_n = [\sigma]_k = \frac{\sigma_{ch}}{n} \quad (4-19a)$$

Đối với vật liệu giòn, vì khả năng chịu nén tốt hơn chịu kéo, nên ta có:

$$[\sigma]_n = \frac{\sigma_B^n}{n}; [\sigma]_k = \frac{\sigma_B^k}{n} \quad (4-19b)$$

Trong đó: $[\sigma]_n$ - ứng suất cho phép khi nén;

$[\sigma]_k$ - ứng suất cho phép khi kéo;

σ_B^n, σ_B^k - giới hạn bền khi nén, khi kéo; σ_{ch} - giới hạn chảy.

Việc chọn các hệ số an toàn thích hợp là một việc rất khó và rất quan trọng. Nếu chọn hệ số an toàn bé thì tiết kiệm được nguyên vật liệu, nhưng có thể chi tiết không được bền lâu. Trái lại, nếu chọn hệ số an toàn lớn, chi tiết có thể bền lâu, nhưng lại tốn nhiều vật liệu, chi tiết quá cồng kềnh, mất mỹ thuật công nghiệp,... Trong thực tế, để chọn hệ số an toàn thích hợp, người ta thường dựa vào kinh nghiệm thực tế trong thiết kế cũng như trong sử dụng.

4.2.6.2. Điều kiện bền của thanh chịu kéo - nén đúng tâm theo ứng suất cho phép.

Đối với vật liệu dẻo:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (4-20)$$

Còn đối với vật liệu giòn là:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_k; \quad \sigma_{\min} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_n \quad (4-21)$$

Trong đó: $\sigma_{\max}$ - ứng suất kéo lớn nhất; $\sigma_{\min}$ - ứng suất nén có trị số bé nhất (hay có giá trị tuyệt đối lớn nhất khi nén).

Ý nghĩa của phương pháp là tìm những điểm có trị số ứng suất pháp lớn nhất khi kéo hoặc khi nén, đó là các điểm nguy hiểm. Khi điểm nguy hiểm đã thỏa mãn điều kiện bền thì tất cả các điểm còn lại đều thỏa mãn. Rõ ràng phương pháp kiểm tra là đơn giản nhưng độ an toàn lớn.

Từ điều kiện (4-20), ta có thể suy ra ba bài toán cơ bản sau:

- **Kiểm tra bền:** Giả sử đã biết vật liệu (tức là đã biết ứng suất cho phép), biết kích thước mặt cắt ngang và lực tác dụng thì ta có thể kiểm tra được độ bền của thanh.

Muốn vậy đầu tiên ta xác định lực dọc trong thanh sau đó tính trị số ứng suất pháp lớn nhất theo công thức (4-12). Nếu giá trị này không vượt quá ứng suất cho phép thì ta có thể kết luận là thanh đủ bền. Trong kỹ thuật sai số cho phép khoảng 5%.

- Chọn kích thước mặt cắt ngang:

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \quad (4-22)$$

- Xác định tải trọng cho phép:

$$N_{z\max} \leq F[\sigma] \quad (4-23)$$

dựa vào đó ta tìm được tải trọng cho phép.

4.2.7. Bài toán siêu tĩnh.

Bài toán siêu tĩnh là bài toán chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học hoặc phương pháp mặt cắt là ta có thể xác định được nội lực trong hệ như phần trên ta đã làm. Nếu không thể xác định được các phản lực hoặc nội lực trong hệ nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học hoặc phương pháp mặt cắt thì các bài toán đó gọi là bài toán siêu tĩnh. Để giải bài toán kéo, nén siêu tĩnh, ngoài các phương trình cân bằng tĩnh học ta phải thêm vào các phương trình phụ nhờ các điều kiện thực về biến dạng hay chuyển vị. Số phương trình phụ này cộng với các phương trình cân bằng tĩnh học đúng bằng số ẩn cần tìm.

Ví dụ 4-3: Tìm ứng suất pháp trong các thanh EB và FC làm cùng một loại vật liệu dùng để treo một thanh AD tuyệt đối cứng (hình 4-28). Các thanh treo có diện tích mặt cắt $F=12\text{cm}^2$.

Giải

Thay liên kết bằng phản lực liên kết Y_A, Z_A, N_1, N_2 . Lập phương trình cân bằng:

$$\sum m_A(F) = 2aN_2 + aN_1 - 3aP = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{N_1 + 2N_2}{3} \quad (a)$$

Đây là bài toán siêu tĩnh bậc 1. Điều kiện tương thích biến dạng ($\Delta l_1 = BB', \Delta l_2 = CC', \Delta ABB' \sim \Delta ACC'$): $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$ (b)

Theo công thức (4-16) ta có:

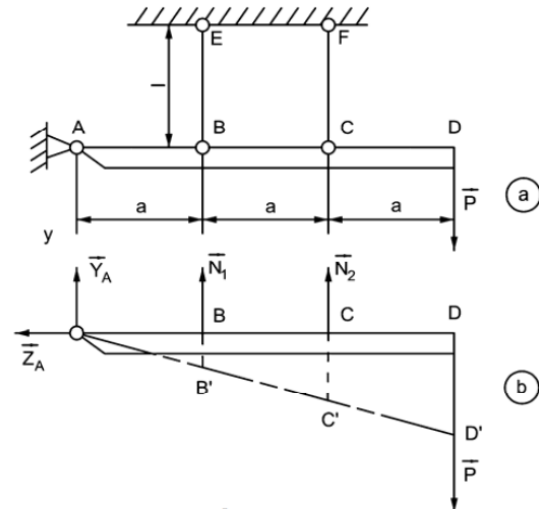
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF};$$

Thay vào biểu thức (b), dễ thấy: $N_2 = 2N_1$

Ứng suất trong các thanh EB và FC là:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{N_1}{F} = \frac{96}{12 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 80 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_2 = 2\sigma_1 = 160 \text{ MN/m}^2$$



Hình 4-28

4.3. XOẮN THUẦN TÚY CỦA THANH THẲNG.

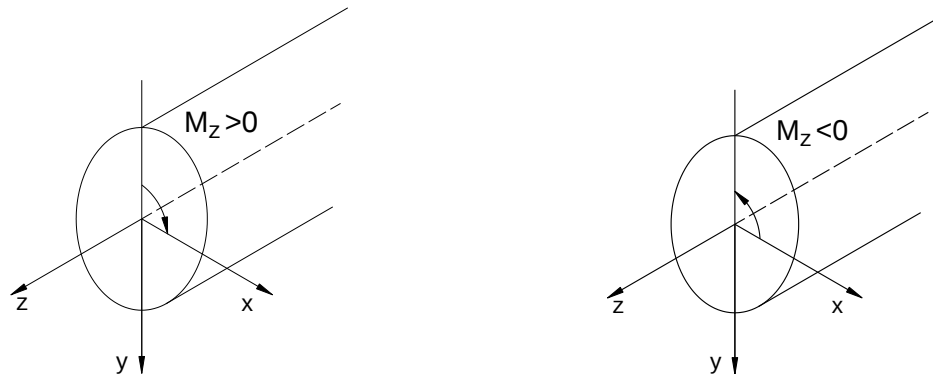
4.3.1. Định nghĩa.

Một thanh chịu xoắn thuần túy khi trên mặt cắt ngang thanh chỉ có một thành phần nội lực là mô men xoắn M_z .

4.3.2. Mô men xoắn- Biểu đồ mô men xoắn.

4.3.2.1. Mô men xoắn.

Để xác định mô men xoắn nội lực trên các mặt cắt ngang của thanh, ta dùng phương pháp mặt cắt. Dấu của mô men xoắn nội lực quy ước như sau: Nếu nhìn vào mặt cắt ta thấy mô men xoắn nội lực quay cùng chiều kim đồng hồ thì nó có dấu dương (>0), ngược lại là dấu âm (<0) (hình 4-30).



Hình 4-30

4.3.2.2. Biểu đồ mô men xoắn.

Ví dụ 4-4: Vẽ biểu đồ mômen xoắn cho thanh chịu lực như hình 4-31a.

Giải

Xác định phản lực tại ngàm C :

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_C = 900 \text{ Nm}$$

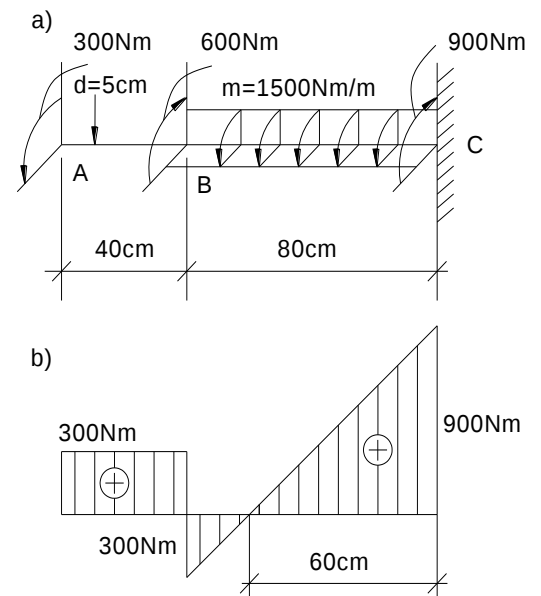
Chi thanh làm hai đoạn AB và BC. Viết phương trình mômen xoắn cho từng đoạn.

Đoạn AB: Cắt thanh ở mặt cắt z_1 ($0 \leq z_1 \leq 40 \text{ cm}$) và xét sự cân bằng phần trái ta được $M_{z_1} = 300 \text{ Nm}$. Vậy trong đoạn AB nội lực có giá trị không đổi.

Đoạn BC: Cắt thanh ở mặt cắt z_2 và xét sự cân bằng của phần phải. Chọn gốc tại C ($0 \leq z_2 \leq 80 \text{ cm}$), tương tự ta được:

$$M_{z_2} = 900 - 1500z_2$$

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ như hình 4-31b.



Hình 4-31

4.3.2.3. Quan hệ giữa mô men xoắn ngoại lực với công suất và số vòng quay của trục truyền.

Giữa công suất của động cơ truyền đến các trục và mô men xoắn ngoại lực tác dụng lên các trục có mối quan hệ sau:

Công A do mô men M thực hiện khi trục quay một góc α trong thời gian t là:

$$A = M \cdot \alpha$$

Vậy công suất
$$W = \frac{A}{t} = M \frac{\alpha}{t} = M\omega$$

Từ đó rút ra
$$M = \frac{W}{\omega} \quad (4-24)$$

Trong đó: m- mô men xoắn ngoại lực (Nm); W- công suất (W);
 ω - vận tốc góc (rad/s); n (vòng/phút).

Vận tốc góc:
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \text{ (rad/s)}$$

Trong kĩ thuật người ta còn sử dụng công thức sau:

Nếu W tính bằng kW ta có:

$$M = 9549 \frac{W}{n} \quad (\text{Nm}) \quad (4-25)$$

W tính bằng Mã lực ta có:

$$M = 7162 \frac{W}{n} \quad (\text{Nm}) \quad (4-26)$$

4.3.3. Thiết lập công thức ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn thuần túy.

Trước hết ta hãy quan sát một thanh tròn chịu xoắn thuần túy. Trên mặt ngoài của thanh trước khi chịu lực, ta kẻ các cạnh song song và vuông góc với trục thanh (hình 4-

32a). Những vạch vuông góc với trục được xem là các vết của mặt cắt. Sau khi chịu lực ta thấy:

- Các cạnh vuông góc trên trục thanh vẫn giữ nguyên hình là đường tròn và vuông góc với trục thanh, khoảng cách giữa chúng vẫn không đổi.

- Các đường song song với trục trở thành các đường xoắn ốc, mạng lưới ô vuông trở thành gần như mạng lưới hình bình hành (hình 4-32b)

4.3.3.1. Các giả thuyết.

1- Giả thuyết về mặt cắt ngang phẳng.

2- Giả thuyết về thứ dọc. Nội dung hai giả thuyết này như ở phần 4.2 (kéo nén đúng tâm).

3- Giả thuyết chiều dài không đổi. Khoảng cách giữa các mặt cắt ngang vẫn giữ nguyên trong quá trình biến dạng.

4- Giả thuyết về bán kính thẳng và không đổi.

Sau khi biến dạng, bán kính của mặt cắt ngang vẫn thẳng và có độ dài không đổi. Tưởng tượng tách ra khỏi thanh một phân tố (hình 4-33a) giới hạn bởi hai mặt phẳng cách nhau một đoạn dz vô cùng bé, hai mặt trụ đồng tâm có bán kính ρ và $\rho + d\rho$, hai mặt phẳng chứa trục thanh và hợp với nhau một góc $d\varphi$. Sau khi biến dạng, mặt cắt ngang 1-1 sẽ xoay đi một góc φ so với mặt cắt ngang. Mặt cắt ngang 2-2 có hoành độ $z+dz$ sẽ bị xoay đi một góc $\varphi + d\varphi$ so với mặt cắt ngang. Vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt 1-1 và 2-2 là $d\varphi$ (hình 4-33b).

Theo giả thuyết 1,2,3 các mặt cắt 1-1 và 2-2 chỉ xoay đi đối với nhau, nhưng vẫn phẳng và khoảng cách không đổi. Ta thấy trên mặt cắt ngang chỉ có thành phần ứng suất tiếp, không có thành phần ứng suất pháp. Phân tố tách ra như trên rõ ràng ở trạng thái trượt thuần túy.

Gọi γ_ρ là góc trượt tỉ đối của phân tố cách trục một bán kính bằng ρ . Từ hình 4-33b ta có:

$$\tan \gamma_\rho = \frac{qq'}{dz} = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

Trong đó: $qq' = \rho d\varphi$ do giả thuyết 1 và 4. Xét vật liệu làm việc trong miền đàn hồi nên biến dạng là rất bé nên ta suy ra:

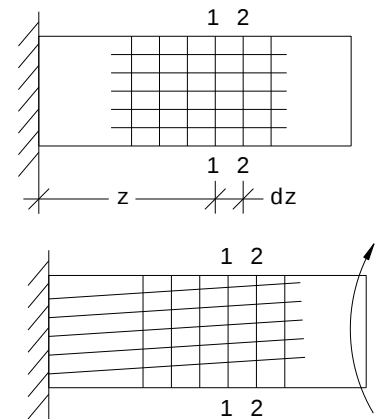
$$\tan \gamma_\rho = \gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (a)$$

$$\text{Theo định luật Húc ta có} \quad \gamma_\rho = \frac{1}{G} \tau_\rho \quad (b)$$

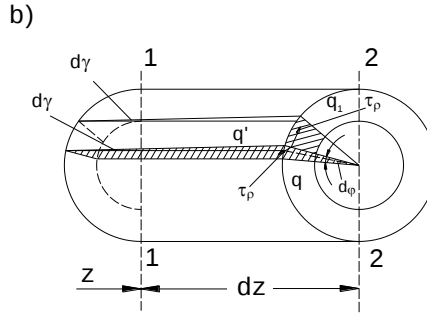
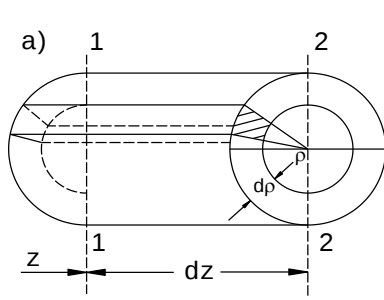
$$\text{Từ (a) và (b) rút ra:} \quad \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (4-27)$$

Trong đó: $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$ là hằng số đối với một mặt cắt ngang và được gọi là góc xoắn tỉ đối; G là mô đun đàn hồi khi trượt.

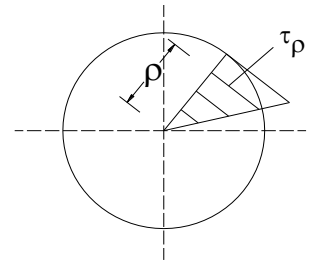
Do đó trên mặt cắt ngang ứng suất tiếp phân bố bậc nhất theo ρ . Hình 4-34 biểu diễn luật phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.



Hình 4-32



Hình 4-33



Hình 4-34

4.3.3.2. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất tiếp và thành phần mô men xoắn nội lực.

Theo (4-9) ta có:

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF \quad (a)$$

Thay giá trị τ_ρ từ biểu thức (4-26) vào (a) ta được:

$$M_z = \int_F G \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} I_p \quad (b)$$

Trong đó: $I_p = \int_F \rho^2 dF$ chính là mô men quán tính độ cực của mặt cắt ngang tròn:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0,1d^4.$$

So sánh (4-27) và (b) ta rút ra biểu thức ứng suất tiếp tính theo nội lực có dạng:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{I_p} \rho \quad (4-28)$$

Ứng suất tiếp lớn nhất tại các điểm ngoài chu vi là: $\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} R$

$$\text{Hay } \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (4-29)$$

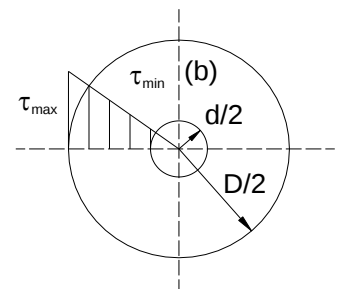
Trong đó: $W_p = \frac{I_p}{R}$ là mô đun chống xoắn, có thứ nguyên là (chiều dài)³, với mặt cắt

$$\text{ngang tròn: } W_p = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} \approx 0,2d^3 \quad (4-30)$$

Với mặt cắt ngang hình vành khăn (hình 4-35):

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R}$$

$$\text{Hoặc } W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi D^3(1 - \alpha^4)}{16} \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4) \quad (4-31)$$



Hình 4-35

Trong đó $\alpha = \frac{d}{D}$; d- đường kính trong, D - đường kính ngoài.

4.3.4. Biến dạng của thanh tròn chịu xoắn.

Khi thanh tròn chịu xoắn biến dạng của thanh được đặc trưng bởi:

- Góc xoắn tỉ đối: $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ (4-32)

Từ (b) ta có: $\theta = \frac{M_z}{GI_p}$ (4-33)

- Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn có chiều dài l, được kí hiệu φ .

Từ (4-32) ta có $d\varphi = \theta dz = \frac{M_z}{GI_p} dz$

Vậy $\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p} dz$ (4-34)

Trong đó: GI_p gọi là độ cứng khi xoắn.

Nếu trong suốt chiều dài l, tỉ số M_z/GI_p không đổi thì:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p} dz = \frac{M_z l}{GI_p} \quad (4-35)$$

Nếu tỉ số M_z/GI_p không đổi trong từng đoạn của thanh ta chia thanh ra làm nhiều đoạn l_i sao cho trong từng đoạn ấy M_z/GI_p không đổi, khi đó:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi} l_i}{G_i I_{pi}} \quad (4-36)$$

Góc φ tính bằng radian, còn thứ nguyên của góc xoắn tỉ đối là $rad/chiều\ dài$.

Ví dụ 4-5: Cho trục chịu lực như hình 4-31a. Tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại các mặt cắt A và B của trục. Cho $G=8.10^6 N/cm^2$; đường kính trục $d=5cm$.

Giải

Trước hết ta vẽ biểu đồ mômen xoắn (hình 4-31b). Giá trị mômen xoắn lớn nhất $M_{z(max)}=90000Ncm$.

Ứng suất tiếp cực đại có giá trị:

$$\tau_{max} = \frac{M_{z(max)}}{W_p} = \frac{90000}{0,2 \times 5^3} = 3600 N/cm^2$$

Góc xoắn tại mặt cắt B so với ngàm C:

$$\varphi_{BC} = \int_0^{80} \frac{M_{z(CB)}}{GI_p} dz$$

Trong đó: $M_{z(CB)} = M_C \left(1 - \frac{z}{60}\right) = 900 \left(1 - \frac{z}{60}\right) \quad (Ncm)$

Khi thay vào ta được:

$$\varphi_{BC} = \int_0^{80} \frac{90000(1 - z/60)}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4} dz = \frac{90000}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4} \left(80 - \frac{80^2}{2 \times 60} \right) = 4,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Góc xoắn tại mặt cắt A so với ngàm C:

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{M_{Z(BA)} l_{BA}}{GI_p} + \varphi_{BC}$$

$$\varphi_{AC} = 4,8 \times 10^{-3} + \frac{30000 \times 40}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4} = 7,2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

4.3.5. Điều kiện bền và điều kiện cứng.

4.3.5.1. Điều kiện bền.

Tại các điểm ở ngoài chu vi, phân tử ở trạng thái trượt thuần túy. Nếu mặt cắt ngang không đổi thì điều kiện bền có dạng:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (4-37)$$

Trong đó: $[\tau]$ được gọi là ứng suất cho phép khi xoắn. Trị số ứng suất cho phép được xác định bằng thực nghiệm theo tiêu chuẩn (tương tự như thí nghiệm kéo).

Đối với vật liệu dẻo $[\tau] = \tau_{ch} / n$.

Đối với vật liệu giòn $[\tau] = \tau_b / n$

trong đó: τ_{ch} - giới hạn chảy khi xoắn; τ_b - giới hạn bền khi xoắn; n - hệ số an toàn.

Giữa $[\tau]$ và $[\sigma]$ tùy theo các thuyết bền cũng có các mối quan hệ sau:

- Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất thì $[\tau] = [\sigma] / 2$
- Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì $[\tau] = [\sigma] / \sqrt{3}$

Trong trường hợp đường kính của thanh thay đổi (ví dụ đối với trục bậc) điều kiện bền phải viết:

$$\tau_{\max} = \left(\frac{M_z}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau] \quad (4-38)$$

4.3.5.2. Điều kiện cứng.

Các chi tiết máy chịu xoắn khi truyền động phải có độ cứng đủ lớn, tức là góc xoắn tỉ đối lớn nhất về trị số tuyệt đối không vượt quá một trị số cho phép nào đó.

$$\theta_{\max} = \left(\frac{M_z}{GI_p} \right)_{\max} \leq [\theta] \text{ rad/chiều dài} \quad (4-39)$$

trong đó $[\theta]$ là góc xoắn tỉ đối cho phép. Điều kiện (4-39) gọi là điều kiện độ cứng. Nếu $[\theta]$ được cho qua (độ/chiều dài) thì khi tính toán sử dụng công thức quy đổi nhau:

$$[\theta] \text{ rad/chiều dài} = \pi/180 [\theta] \text{ độ/chiều dài}$$

Từ điều kiện bền và điều kiện cứng ta cũng suy ra ba bài toán cơ bản sau:

- Kiểm tra thanh thỏa mãn điều kiện bền và điều kiện cứng theo (4-37) và (4-39).
- Chọn kích thước mặt cắt ngang:

Theo điều kiện bền
$$W_p \leq \frac{M_z}{[\tau]} \quad (4-40)$$

Theo điều kiện cứng
$$I_p \leq \frac{M_z}{G[\theta]} \quad (4-41)$$

Ta sẽ chọn đường kính có trị số lớn nhất từ (4-40) và từ (4-41).

- Tìm tải trọng cho phép:

Theo điều kiện bền
$$M_z \leq W_z[\tau] \quad (4-42)$$

Theo điều kiện cứng
$$M_z \leq GI_p[\theta] \quad (4-43)$$

Từ đó sẽ chọn tải trọng bé hơn, để đảm bảo mô men xoắn nội lực thỏa mãn đồng thời cả hai bất đẳng thức trên.

Ví dụ 4-6: Cho một trục chịu lực như hình 4-36. Các puli 1, 2, 3 là bị động có công suất $W_1 = 40\text{Hp}$; $W_2 = 20\text{Hp}$; $W_3 = 30\text{Hp}$; puli 0 là chủ động. Biết trục quay có $n=1000\text{vòng/phút}$; $\alpha=d/D=0,6$; vật liệu có $[\tau]=4500\text{N/cm}^2$; $G=8.10^6\text{N/cm}^2$; $\theta^0=2^0/\text{m}$. Xác định D và d ?

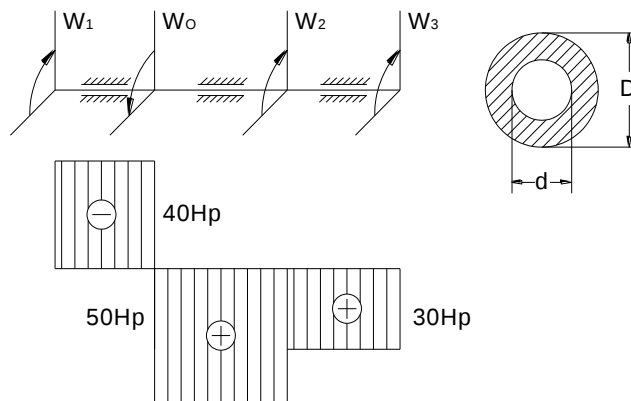
Giai

Biểu đồ công suất được vẽ trên hình 4-36. Từ biểu đồ công suất ta thấy mặt cắt nguy hiểm có $W_p=50\text{Hp}$. Vậy mômen xoắn theo (4-26) là:

$$M_{z\max} = \frac{716200}{n} W_p = \frac{716200}{1000} 50 \quad (\text{Ncm})$$

Chọn kích thước theo điều kiện bền ta có:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{716200}{n[\tau]} W_p$$



Hình 4-36

Từ đó suy ra đường kính ngoài:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \times \frac{716200 \times W_p}{n[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \times \frac{716200 \times 50}{1000 \times 4500 \times [1 - (0,6)^4]}}$$

$$D \approx 3,64 \text{ cm.}$$

Chọn kích thước theo điều kiện cứng.

Từ (4-40) ta suy ra

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \geq \frac{716200 W_p \times 100 \times 180}{n G [\theta^\circ] \pi}$$

Rút ra $D = 3,49 \text{ cm}$

So sánh ta chọn $D = 3,64 \text{ cm}$; $d = 0,6 \times 3,64 = 2,18 \text{ cm}$

4.3.6. Bài toán siêu tĩnh.

Phương pháp giải bài toán xoắn siêu tĩnh giống như giải bài toán siêu tĩnh chịu kéo, nén. Ở đây chỉ cần trình bày thông qua ví dụ.

Ví dụ 4-7: Cho một thanh chịu xoắn, hai đầu liên kết ngàm chịu lực như hình vẽ 4-37a. Vẽ biểu đồ mômen xoắn.

Giải

Điều kiện cân bằng chỉ cho ta phương trình để xác định các mômen xoắn nội lực tại các ngàm là:

$$\sum m(z) = M_A + M_B + M_O = 0 \quad (a)$$

Phương trình (a) chứa hai ẩn số là M_A và M_B , do đó bài toán là siêu tĩnh bậc 1. Để tìm phương trình phụ, trình tự ta làm như sau:

- Bỏ một liên kết thừa đi, ví dụ bỏ ngàm B (hoặc ngàm A) và đặt các phản lực thích hợp, khi đó thanh AB trở thành tĩnh định nhưng ta chưa biết M_B .
- Ngoại lực M_B tìm được nhờ phương trình về biến dạng góc xoắn tương đối giữa B và A bằng không.

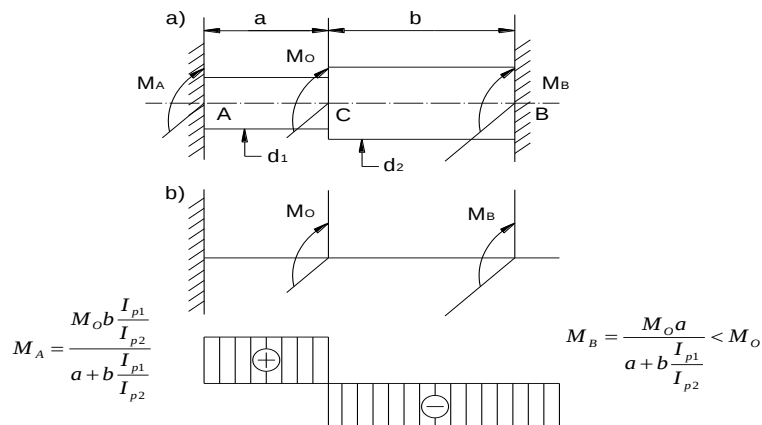
$$\varphi_{BA} = \frac{M_B b}{G I_{p_2}} + \frac{M_B a}{G I_{p_1}} + \frac{M_O b}{G I_{p_1}} = 0 \quad (b)$$

Từ phương trình (b) ta tìm được giá trị M_B .

$$M_B = - \frac{M_O a}{a + b \left(I_{p_1} / I_{p_2} \right)}$$

trong đó: $I_{p_1} = 0,1 d_1^4$; $I_{p_2} = 0,1 d_2^4$ là các mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang đoạn AC và CB.

Sau khi tìm được giá trị M_B , việc vẽ biểu đồ tiến hành như đã biết. Biểu đồ mômen xoắn được vẽ trên hình 4-37b.



Hình 4-37

4.4. UỐN PHẪNG CỦA THANH THẲNG.

4.4.1. Các định nghĩa và phân loại.

- Ngoại lực tác dụng có thể là lực tập trung, lực phân bố và mô men tập trung. Mặt phẳng chứa các lực và mô men đó được gọi là mặt phẳng tải trọng.

- Đường tải trọng là giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và mặt cắt ngang của thanh.

- Mặt phẳng quán tính chính trung tâm là mặt phẳng tạo nên bởi trục của thanh và một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 4-38).

- Thanh chủ yếu chịu uốn gọi là dầm.

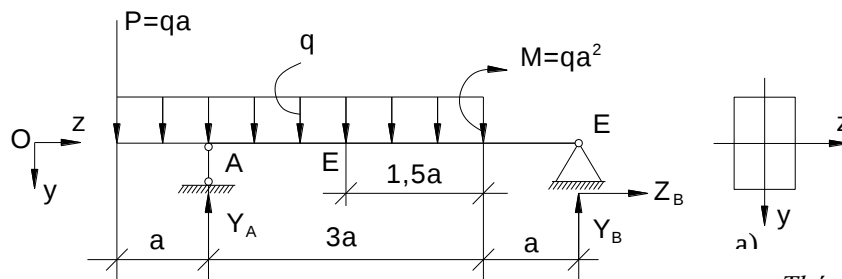
- Nếu trục của dầm sau khi chịu uốn cong vẫn nằm trong một mặt phẳng quán tính chính trung tâm, thì sự uốn được gọi là uốn phẳng.

Ta chia uốn phẳng làm hai loại: uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

4.4.2. Nội lực và biểu đồ nội lực.

4.4.2.1. Nội lực - Quy ước dấu của nội lực.

Xét một dầm chịu lực như trên hình 4-39. Các ngoại lực tác dụng lên dầm bao gồm lực tập trung, lực phân bố, mô men tập trung và các phản lực tại các gối A và B. Các lực tác dụng đều nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm Oyz.



Hình 4-39

Đầu tiên ta phải xác định được các phản lực tại các gối A và B.

Trong bài toán phẳng, nhờ ba phương trình cân bằng tĩnh học ta xác định được các thành phần phản lực sau:

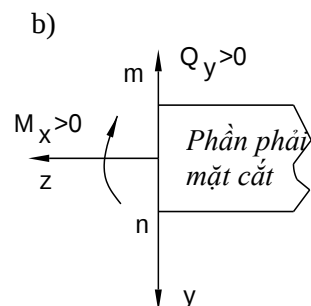
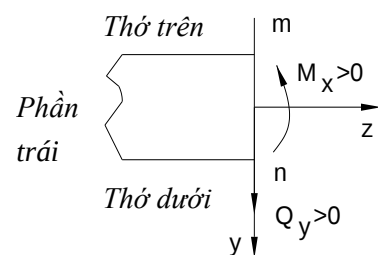
$$\sum F_z = 0 \text{ rút ra } Z_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}) = 0 \rightarrow Y_B 4a + Pa - M - q4aa = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}) = 0 \rightarrow Y_A 4a + P5a - q4a3a + M = 0$$

Từ đó suy ra:

$$Y_A = 4qa; Y_B = qa$$



Hình 4-40

- Lực cắt Q_y được coi là dương, nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt ngang quay một góc 90° thuận chiều kim đồng hồ thì gặp chiều của lực cắt Q_y .
- Mô men uốn được coi là dương nếu nó làm cho thớ dưới trục dầm bị kéo tức làm căng các thớ về phía dương của trục y , (trong dầm chọn chiều dương xuống dưới). Các thành phần nội lực được qui ước là chiều dương biểu diễn trên hình 4-40a và 4-40b.

Ví dụ 4-8: Xác định nội lực tại mặt cắt E (hình 4-41).

Giải

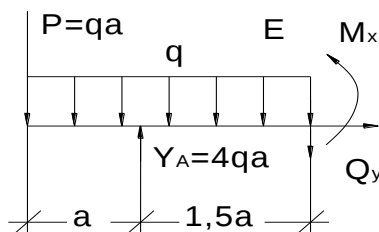
Sử dụng phương pháp mặt cắt, tưởng tượng phân dầm thành hai phần phải trái như trên hình 4-41.

Xét sự cân bằng của phần trái.

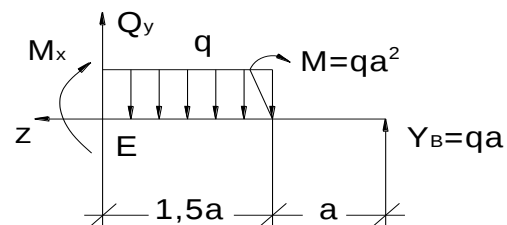
$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_y + qa + q2,5a - 4qa = 0 \Rightarrow Q_y = 0,5qa > 0$$

$$\sum \bar{m}_E(\vec{F}) = 0 \quad M_x + qa2,5a + \frac{q2,5a1,5a}{2} - 4qa1,5a = 0$$

$$\Rightarrow M_x = 0,375qa^2 > 0$$



phần trái



phần phải

Hình 4-41

Xét sự cân bằng của phần phải:

$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_y qa - 1,5qa + qa = 0 \Rightarrow Q_y = 0,5qa > 0$$

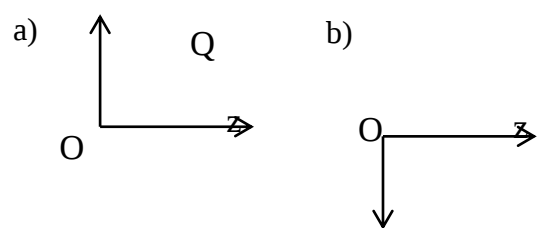
$$\sum \bar{m}_E(\vec{F}) = 0 \quad M_x + qa^2 + \frac{q1,5a1,5a}{2} - qa2,5a = 0$$

$$\Rightarrow M_x = 0,375qa^2 > 0$$

Ta thấy dù xét phần trái hoặc phải kết quả nhận được đều như nhau. Do đó về sau ta xét phần nào để cho tính toán được đơn giản hơn.

4.4.2.2. Biểu đồ nội lực.

Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của lực cắt và mô men uốn dọc theo trục của dầm. Nhờ nó ta dễ dàng tìm được các mặt cắt mà mô men uốn có trị số lớn nhất. Các mặt cắt đó thường là các mặt cắt nguy hiểm. Sau này thường chọn để tính toán điều kiện bền. Trong bài giảng này khi vẽ đồ thị ta quy ước hệ trục được chọn như sau:



Hình 4-42^x

- Đối với biểu đồ lực cắt Q , hệ trục chọn như hình 4-42a.
- Đối với mô men uốn, hệ trục chọn như hình 4-42b.

Ví dụ 4-9: Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu lực như hình 4-43.

Giải

Sau khi xác định các phản lực tại các gối A và B ta chia dầm thành những đoạn CA, AB, DB, trong đó lực cắt và mômen là các hàm biến thiên liên tục. Dưới đây phương trình mômen lực được thiết lập đối với giao điểm giữa mặt cắt và trục dầm và được kí hiệu ΣM .

Đoạn CA (hình 4-43a):

$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow Q_1 + P + qz = 0 \rightarrow Q_1 = -qa - qz_1$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_1 + Pz_1 + q \frac{z_1^2}{2} = 0$$

$$\rightarrow M_1 = -qaz_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$

Đoạn AD ($0 \leq z_2 \leq 4a$) (hình 4-43b)

Xét phần trái

Phương trình lực cắt:

$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow Q_2 = -qa - qz + 4qa$$

Phương trình mômen

$$\Sigma M = 0$$

$$M_2 = -qaz_2 - q \frac{z_2^2}{2} + 4qa(z_2 - a)$$

Đoạn BD. Xét phần phải ($0 \leq z_3 \leq a$) (hình 4-43c) chọn gốc tại B, tương tự:

$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow Q_3 + Y_B = 0 \rightarrow Q_3 = -qa$$

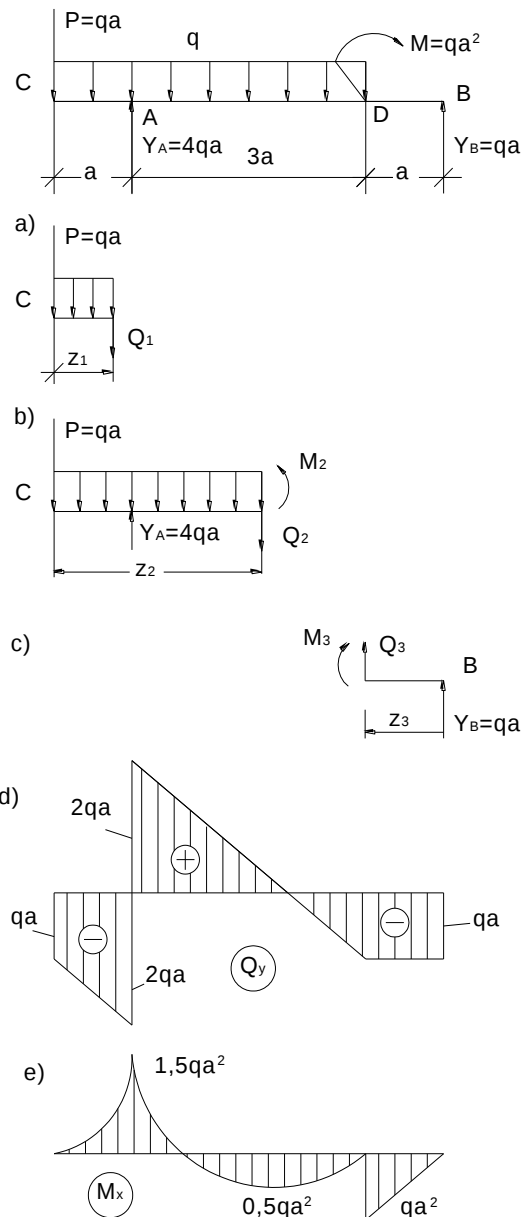
$$\Sigma M = 0 \rightarrow -M_3 + Y_B z_3 = 0 \rightarrow M_3 = qaz_3$$

Trên cơ sở phương trình đã có, ta vẽ biểu đồ lực cắt Q_y , mômen uốn M_x .

Biểu đồ nội lực được vẽ trên hình 4-43d và hình 4-43e. Các đồ thị được vẽ như vẽ các đồ thị hàm số thông thường. Ở đây ta chỉ cần chú ý đến các quy ước về cách chọn hệ trục tọa độ và quy ước về dấu đã nói ở trên.

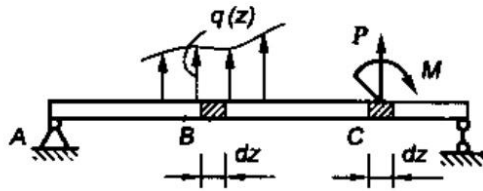
Từ biểu đồ trên ta rút ra một số nhận xét quan trọng để kiểm tra hoặc vẽ biểu đồ nội lực một cách nhanh chóng.

- Tại mặt cắt ngang nào đó đặt lực tập trung thì tại đó có bước nhảy của biểu đồ lực cắt. Giá trị bước nhảy chính bằng giá trị lực tập trung (Ví dụ, tại mặt cắt A, C, B).
- Tại mặt cắt ngang nào có mômen tập trung thì tại đó có bước nhảy chính bằng giá trị mômen tập trung (ví dụ, tại mặt cắt D).
- Trên đoạn dầm không có tải trọng phân bố, biểu đồ lực cắt là hằng số, biểu đồ mômen uốn là bậc nhất. Trên đoạn dầm có tải trọng phân bố đều, biểu đồ lực cắt là bậc nhất, biểu đồ mômen uốn là bậc hai. Tại chỗ có lực cắt $Q=0$ trên biểu đồ lực cắt, thì biểu đồ mômen uốn có giá trị cực trị. Như vậy giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn sẽ có mối quan hệ vi phân nhất định.

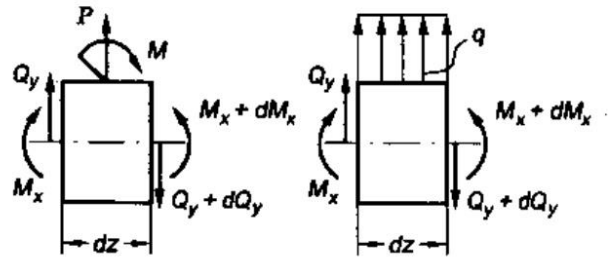


Hình 4-43

Thực vậy, giả sử cho một dầm chịu lực bất kỳ như trên hình 4-44. Tại mặt cắt ngang C của dầm có đặt tập trung P và một mômen tập trung M_0 . Ta tưởng tượng cắt dầm ra một đoạn vô cùng bé dz bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2, ở về hai phía của mặt cắt ngang C, như trên hình 4-45. Từ điều kiện cân bằng của phân tố ta được:



Hình 4-44



Hình 4-45

Hình 4-46

$$Q_y + P - (Q_y + dQ_y) = 0$$

$$M_x + Q_y dz + M_0 + P \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé: $Q_y dz$ và $P \frac{dz}{2}$ so với M_x và M_0 , ta rút ra điều kiện cân nhận xét:

$$\Delta Q_y = P; \quad dM_x = M_0$$

Bây giờ ta cắt dầm ra một đoạn vô cùng bé dz , bởi hai mặt cắt về hai phía của mặt cắt ngang B như hình 4-46. Vì chiều dài của phân tố vô cùng nhỏ nên chúng ta có thể coi tải trọng phân bố đều trong đoạn này. Từ điều kiện cân bằng của phân tố ta nhận hai phương trình sau:

$$Q_y q \cdot dz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

$$M_x + Q_y \cdot dz + q dz \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Nếu bỏ qua lượng vô cùng bé $q \frac{dz^2}{2}$, ta được:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q(z); \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (4-44)$$

Vậy đạo hàm của lực cắt bằng cường độ của tải trọng phân bố theo chiều dài và đạo hàm của mômen uốn bằng lực cắt. Sự liên hệ đó gọi là sự liên hệ vi phân giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn.

Qua các ví dụ trên ta có thể tóm tắt trình tự cách vẽ biểu đồ như sau:

- Xác định phản lực tại chỗ liên kết (thanh đầu ngàm đều tự do có thể không cần xác định phản lực).
- Phân đoạn.
- Viết phương trình lực cắt, mômen uốn cho từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ cho từng đoạn.
- Kiểm tra kết quả nhờ các nhận xét đã nêu ở trên.

4.4.3. Dầm chịu uốn phẳng thuần túy.

4.4.3.1. Định nghĩa.

Một dầm gọi là uốn thuần túy phẳng khi trên mặt cắt ngang của dầm chỉ có một thành phần nội lực là mô men uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm, ví dụ M_x hoặc M_y (hình 4-47)

4.4.3.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Quan sát một dầm chịu uốn phẳng thuần túy có mặt cắt ngang hình chữ nhật. Trước khi dầm chịu uốn ta vạch lên mặt bên của nó những đường thẳng song song với trục, tương trưng cho các thớ dọc và những đường thẳng vuông góc với trục biểu thị các mặt cắt ngang (hình 4-48a).

Sau khi dầm bị uốn ta nhận thấy:

- Trục của dầm bị cong đi.
- Các vạch song song với trục cũng bị cong đi nhưng vẫn song song với trục.
- Các vạch vuông góc với trục vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm đã bị uốn cong.
- Các góc vuông tại giao điểm các vạch dọc và ngang vẫn được duy trì là vuông (hình 4-48b).

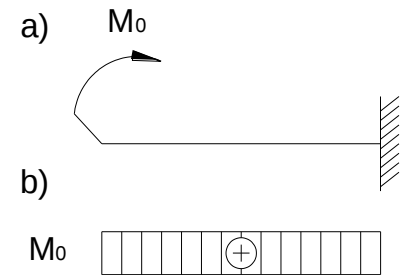
Từ nhận xét trên ta đưa ra hai giả thuyết sau:

Giả thuyết mặt cắt ngang phẳng và giả thuyết về thớ dọc như phần kéo, nén.

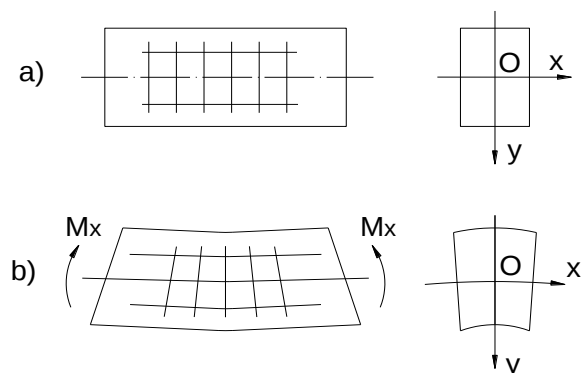
Tiếp tục quan sát biến dạng của dầm ta thấy các thớ dọc ở phía trên trục dầm bị co lại và các thớ ở phía dưới trục dầm bị giãn ra. Như vậy từ thớ bị co sang thớ bị giãn sẽ có thớ không bị giãn, không bị co, tức là thớ không bị biến dạng. Ta gọi thớ này là thớ trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Đường trung hòa chia mặt cắt ngang thành hai miền: một miền gồm các thớ bị co và miền kia làm các thớ bị giãn.

Vì các thớ ở phía trên bị co nên bề rộng mặt cắt ngang sẽ bị phình ra ở phía trên. Còn các thớ dưới bị giãn nên bề rộng của mặt cắt ngang sẽ bị hẹp lại ở phía dưới (hình 4-48b). Mặt cắt không còn giữ nguyên hình chữ nhật như trước khi biến dạng. Đường trung hòa là một đường cong. Nhưng vì biến dạng nhỏ nên chúng ta có thể coi mặt cắt ngang sau khi biến dạng vẫn là hình chữ nhật và coi đường trung hòa là một đường thẳng. Mặt khác chúng ta chỉ xét trường hợp tải trọng tác dụng trong mặt phẳng chứa trục dầm và trục đối xứng của mặt cắt ngang nên đường trung hòa sẽ vuông góc với đường tải trọng, tức là vuông góc với trục đối xứng của mặt cắt ngang. Biến dạng của dầm chịu uốn phẳng thuần túy chỉ là sự quay của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa.

Xét một mặt cắt ngang nào đó và chọn hệ trục tọa độ như sau: trục Ox là trục đường trung hòa, trục Oy là trục đối xứng, trục Oz vuông góc với mặt cắt ngang (hình 4-48). Theo giả thuyết về mặt cắt ngang phẳng, với nhận xét các ô vuông sau khi biến dạng vẫn vuông. Ta có thể nói rằng trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp. Vì nếu có ứng suất tiếp thì dưới tác dụng của nó mặt cắt ngang sẽ vênh đi và các ô vuông sẽ không



Hình 4-47



Hình 4-48

giữ nguyên góc vuông nữa. Theo giả thuyết về thớ dọc thì $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Như vậy tại một điểm nào đó trên mặt cắt ngang là trạng thái ứng suất đơn. Sự liên hệ giữa ứng suất pháp σ_z và biến dạng dài ε_z theo định luật Húc có dạng:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (a)$$

Nếu biết được biến dạng, chúng ta dễ dàng tìm được sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang. Muốn vậy ta xét một đoạn dầm dz được cắt bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (hình 4-49a). Sau khi biến dạng hai mặt cắt này tạo với nhau một góc dφ (hình 4-49b). Gọi ρ là bán kính cong của thớ trung hòa O₁O₂. Vì thớ trung hòa không biến dạng nên:

$$O_1O_2 = dz \Rightarrow O_1O_2 = \rho d\varphi$$

Xét biến dạng của một thớ mn cách thớ trung hòa một khoảng cách y. Chiều dài của thớ này trước khi biến dạng là:

$$m_0n_0 = dz = \rho d\varphi$$

và sau khi biến dạng

$$mn = (\rho + y)d\varphi$$

độ dẫn dài tỉ đối của thớ mn bằng:

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\sigma_z = E \frac{y}{\rho} \quad (4-45)$$

Tại mặt cắt ngang bán kính ρ có trị số xác định, E là một hằng số. Vậy quy luật phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang là phẳng (hình 4-50a). Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với mặt cắt chính là mặt trung hòa. Rõ ràng ứng suất pháp trên các đường thẳng song song với trục trung hòa có trị số như nhau. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp đơn giản như trên hình 4-50b. Qua biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang ta thấy:

- Trên mặt cắt ngang chia làm hai miền: một miền chịu kéo và miền kia chịu nén.
- Các điểm có trị số ứng suất pháp lớn nhất là các điểm xa trục trung hòa nhất (hình 4-50b).

4.4.3.3. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất pháp với thành phần mô men uốn nội lực.

Xét mặt cắt ngang có mô men uốn M_x, theo 4-4 ta có:

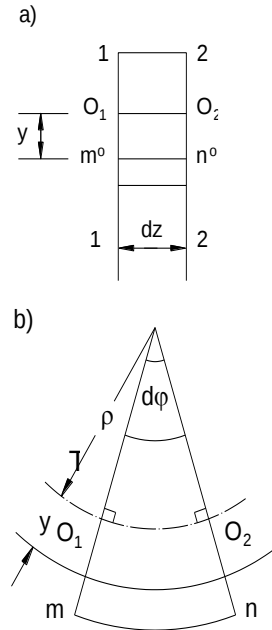
$$M_x = \int_F \sigma_z y dF \quad (a)$$

Thay giá trị σ_z từ (4-45) vào (a) ta có quan hệ:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF$$

$$\text{Hoặc} \quad M_x = \frac{E}{\rho} I_x \quad \text{hay} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (4-46)$$

Trong đó $I_x = \int_F y^2 dF$ là mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.



Hình 4-49

So sánh (4-45) và (4-46) ta suy ra công thức ứng suất pháp trên mặt cắt ngang như sau:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (4-47)$$

4.4.3.4. Vị trí trục trung hòa.

Từ định nghĩa về uốn phẳng thuần túy ta suy ra trên mọi mặt cắt ngang thành phần lực dọc bằng không ($N_z=0$). Theo (4-3) ta có

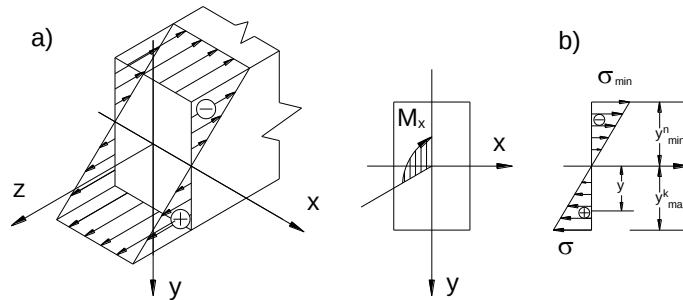
$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (a)$$

Thay giá trị σ_z từ (4-46) vào biểu thức trên ta được

$$N_z = \int_F \frac{E}{\rho} y dF = 0 \text{ hoặc } N_z = \frac{E}{\rho} S_x = 0$$

Trong đó $S_x = \int_F y dF = 0$ là mô men tĩnh của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.

Vì $\frac{E}{\rho} \neq 0$ nên suy ra $S_x=0$. Vậy trục trung hòa là một trục trung tâm. Trong hệ trục tọa độ như đã chọn, trục y là một trục quán tính chính trung tâm, trùng với đường tải trọng. Khi đó trục trung hòa chính là một trục quán tính chính trung tâm thứ hai và vuông góc với đường tải trọng.



Hình 4-50

4.4.3.5. Ứng suất kéo và nén lớn nhất.

Từ biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang đã có nhận xét là ứng suất pháp có trị số tuyệt đối lớn nhất tại các điểm xa nhất tính từ trục trung hòa.

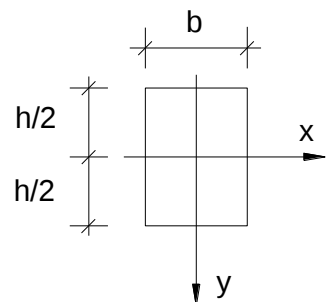
Nếu trục trung hòa là một trục đối xứng, ví dụ mặt cắt ngang hình chữ nhật, hình tròn, chữ I, ... thì ta thấy ứng suất kéo và ứng suất nén lớn nhất có trị số tuyệt đối bằng nhau.

Ví dụ 4-10: Mặt cắt ngang là hình chữ nhật có kích thước là $b \times h$ (hình 4-51).

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

Trong đó: $W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{2bh^2}{6}$

Mặt cắt ngang là hình tròn có bán kính R: $|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$



Hình 4-51

Trong đó:
$$W_x = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} \approx 0,1d^3$$

Đại lượng W_x gọi là mô đun chống uốn của mặt cắt ngang. Nó phụ thuộc vào hình dạng, kích thước của mặt cắt ngang và có thứ nguyên là [chiều dài]³.

Nếu mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hòa, thì ứng suất kéo lớn nhất và ứng suất nén có trị số tuyệt đối lớn nhất được xác định bởi các công thức sau:

- Ứng suất kéo lớn nhất $\max \sigma_z^k = \frac{|M_x|}{I_x} |y^k|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x^k}$

Trong đó $W_x^k = \frac{I_x}{|y^k|_{\max}}$; $|y^k|_{\max}$ là tọa độ điểm biên chịu kéo có trị số tuyệt đối lớn nhất.

- Ứng suất nén lớn nhất về trị số tuyệt đối: $\max |\sigma_z^n| = \frac{|M_x|}{I_x} |y^n|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x^n}$

Trong đó $W_x^n = \frac{I_x}{|y^n|_{\max}}$; $|y^n|_{\max}$ là tọa độ của điểm biên chịu nén có trị số tuyệt đối lớn nhất (hình 4-52).

Các đại lượng W_x^k , W_x^n là các mô đun chống uốn của mặt cắt ngang trong miền kéo hoặc nén. Ta thấy, với cùng một trị số mô men uốn thì các trị số ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang tỷ lệ nghịch với các trị số mô đun chống uốn. Như vậy với cùng mặt cắt ngang có diện tích F , nếu mô men chống uốn càng lớn thì càng tiết kiệm vật liệu.

Để đánh giá mức độ tiết kiệm vật liệu của các dạng mặt cắt khác nhau, người ta đưa vào tỉ số không thứ nguyên $W_x / \sqrt{F^3}$. Tỉ số này càng lớn thì mức độ tiết kiệm vật liệu càng tốt.

Các mặt cắt ngang có tính chất làm tiết kiệm được nguyên vật liệu được gọi là các mặt cắt ngang hợp lý khi dầm chịu uốn. Việc chế tạo các thép cán định hình có mặt cắt ngang hình chữ I, hình chữ U dựa trên tính chất hợp lý này.

4.4.3.6. Điều kiện bền và ba bài toán cơ bản.

Trạng thái ứng suất tại các điểm nguy hiểm của dầm chịu uốn thuần túy phẳng là trạng thái ứng suất đơn. Tương tự điều kiện bền trong bài toán kéo-nén đúng tâm điều kiện bền ở đây được viết như sau:

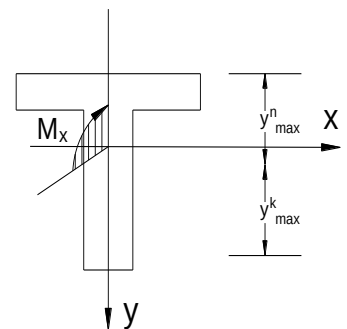
$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4-48)$$

Dầm vật liệu giòn, vì $\sigma_B^k \neq \sigma_B^n$ nên ta phải viết hai điều kiện:

$$\sigma_{\max}^k = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma_n] \quad (4-49)$$

Từ điều kiện bền ta suy ra ba bài toán cơ bản sau:

- Kiểm tra bền theo công thức (4-48) và (4-49).



Hình 4-52

- Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện: $W_x = \frac{M_x}{[\sigma]}$ (4-50)

- Tìm tải trọng cho phép thỏa mãn điều kiện:

$$\max M_x \leq W_k [\sigma] \quad (4-51)$$

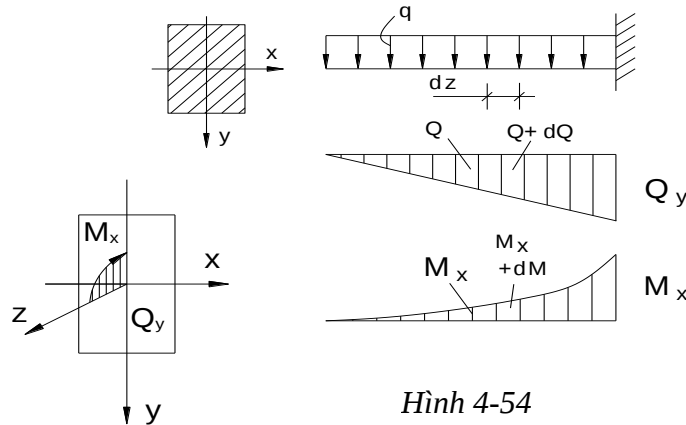
4.4.4. Uốn ngang phẳng.

4.4.4.1. Định nghĩa.

Một dầm gọi là chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang của nó có hai thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mô men M_x (hoặc Q_x và M_y).

4.4.4.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Trong uốn ngang phẳng, mặt cắt ngang có lực cắt. Lực cắt này do ứng suất tiếp tạo thành. Các ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang phân bố không đều theo chiều cao của nó. Do ảnh hưởng đó, các biến dạng góc cũng có trị số thay đổi theo chiều cao của mặt cắt ngang làm cho mặt cắt ngang sau khi bị uốn không còn phẳng nữa mà hơi bị vênh theo hình chữ S (hình 4-55c). Tuy nhiên trong trường hợp lực cắt bằng hằng số thì các mặt cắt ngang đều vênh như sau, do đó sự vênh không có ảnh hưởng đến độ dẫn hoặc độ co như đã nghiên cứu trong uốn phẳng thuần túy. Bởi vậy công thức tính ứng suất pháp (4-47) vẫn còn đúng trong trường hợp uốn ngang phẳng.



Hình 4-53

Hình 4-54

Nếu mặt cắt ngang hoặc lực cắt thay đổi theo chiều dọc trục thì công thức (4-47) sẽ có một sai số trong phạm vi bé hơn 5%, sai số đó có thể bỏ qua được.

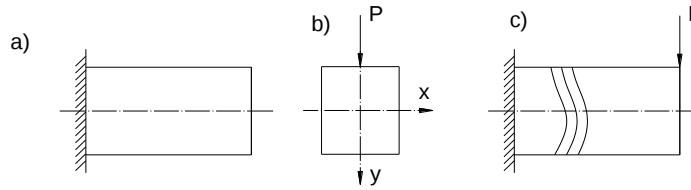
Tóm lại ứng suất pháp trên mặt cắt ngang vẫn được tính theo công thức (4-47).

4.4.4.3. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.

Trong tính toán sau này người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp do lực cắt. Khi cần kể đến ảnh hưởng đó người ta có thể sử dụng công thức của Jurapxki dưới dạng:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{b^c I_x} \quad (4-52)$$

Trong đó: τ_{zy} - ứng suất tiếp có phương của lực cắt Q_y ; I_x - mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa; b^c chiều rộng mặt cắt đi qua điểm tính ứng suất vuông góc với chiều của ứng suất tiếp; S_x^c - mô men tĩnh của phần mặt cắt ngang bị cắt đối với trục trung hòa (hình 4-55).



Hình 4-55

$$S_x^c = \int_{F^c} \xi dF$$

ξ - tung độ trọng tâm của vi phân diện tích dF .

Ví dụ: Mặt cắt hình chữ nhật. Theo hình 4-46a ta có:

$$S_x^c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$\text{Suy ra } \tau_{zy} = \frac{3Q_y}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ nhật được biểu diễn trên hình 4-46b. Tại các điểm trên trục trung hòa ứng suất tiếp đạt trị số lớn nhất.

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2F}$$

Mặt cắt ngang hình tròn:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}; b_y = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$S_x^c = \int_{F^c} \xi dF \quad (a)$$

Đối với trục trung hòa ta có:

$$dF = b_\xi d\xi = \sqrt{R^2 - \xi^2} d\xi \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được:

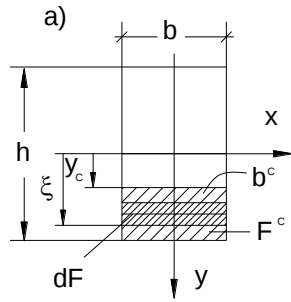
$$S_x^c = \int_y^R 2\xi \sqrt{R^2 - \xi^2} d\xi = - \int_y^R \sqrt{R^2 - \xi^2} d(R^2 - \xi^2)$$

$$S_x^c = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \quad (c)$$

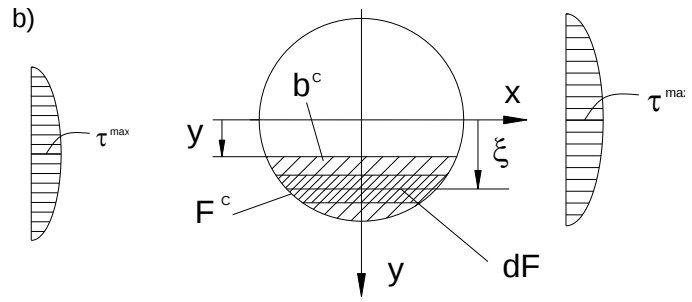
Thay trị số (c) vào (4-46) sau khi rút gọn ta được:

$$\tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4} (R^2 - y^2)$$

Biểu đồ ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang cho trên hình 4-45. Ứng suất tiếp tại các điểm trên trục trung hòa đạt giá trị lớn nhất.



Hình 4-46



Hình 4-47

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F}$$

4.4.5. Điều kiện bền đối với dầm chịu uốn ngang phẳng.

4.4.5.1. Uốn thuần túy phẳng.

Trạng thái ứng suất tại các điểm nguy hiểm của dầm chịu uốn thuần túy phẳng là trạng thái ứng suất đơn. Tương tự điều kiện bền trong bài toán kéo - nén đúng tâm, điều kiện bền ở đây được viết như sau:

- Dầm vật liệu dẻo, vì $\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n$ nên ta có:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4-53)$$

- Dầm vật liệu giòn, vì $\sigma_B^k \neq \sigma_B^n$ nên ta phải viết hai điều kiện bền:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^k &= \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k \\ |\sigma|_{\max}^n &= \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \end{aligned} \quad (4-54)$$

Tìm vị trí mặt cắt có ứng suất pháp lớn nhất: Nếu dầm có mặt cắt ngang không thay đổi và vật liệu của dầm là vật liệu dẻo thì lấy ở mặt cắt ngang có mô men uốn lớn nhất. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu giòn ta phải tìm mặt cắt ngang thỏa mãn các biểu thức 4-54 (kéo và nén).

Từ điều kiện bền ta suy ra hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang khi chịu uốn phẳng thuần túy như sau:

- Đối với dầm làm bằng vật liệu dẻo: chọn mặt cắt ngang có trục trung hòa cũng là trục đối xứng.
- Đối với dầm làm bằng vật liệu giòn. Xuất phát từ điều kiện bền (4-54):

$$\begin{aligned} \frac{|M_x|}{I_x} |y^k|_{\max} &= [\sigma]_k \\ \frac{|M_x|}{I_x} |y^n|_{\max} &= [\sigma]_n \end{aligned}$$

Chia hai vế của hai bất đẳng thức cho nhau ta được:

$$\frac{|y^k|_{\max}}{|y^n|_{\max}} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

$$\text{Vì } [\sigma]_k < [\sigma]_n \text{ nên } |y^k|_{\max} < |y^n|_{\max} \quad (a)$$

Vậy đối với dầm làm bằng vật liệu giòn hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang là mặt cắt không đối xứng qua trục trung hòa và phải bố trí sao cho tỉ số $|y^k|_{\max}$ và $|y^n|_{\max}$ thỏa mãn điều kiện (a).

Từ các điều kiện bền trên ta cũng suy ra ba bài toán cơ bản.

- Kiểm tra bền theo công thức (4-53) và (4-54).
- Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện:

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} \quad (4-55)$$

- Tìm tải trọng cho phép thỏa mãn điều kiện:

$$\max M_x \leq W_x [\sigma] \quad (4-56)$$

Ví dụ 4-11: Một dầm bằng vật liệu có ứng suất pháp cho phép khi kéo $[\sigma]_k = 3,5 \text{ kN/cm}^2$ và khi nén $[\sigma]_n = 11 \text{ kN/cm}^2$ chịu lực như trên hình 4-48a. Kiểm tra độ bền của dầm.

Giải

- Vẽ biểu đồ mômen uốn (hình 4-48b) cho trị số $M_x = 4,5 \text{ kNm}$.
- Tìm các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang cần thiết để tính được các giá trị mômen quán tính chính trung tâm, các giá trị $|y^k|_{\max}$ và $|y^n|_{\max}$.

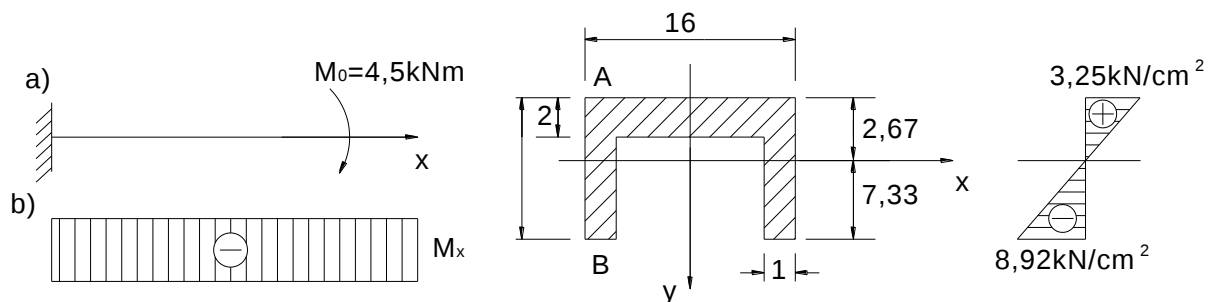
Áp dụng các công thức tính các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang ta được các trị số sau (hình 4-48c):

$$I_x = 370 \text{ cm}^4; \quad |y^k|_{\max} = 2,67 \text{ cm}; \quad |y^n|_{\max} = 7,33 \text{ cm}$$

- Tính các giá trị $\max \sigma_z^k$ và $\max |\sigma_z^n|$:

$$\max \sigma_z^k = \sigma_A = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{4,5 \times 100}{370} \cdot 2,67 = 3,25 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]_k = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\max \sigma_z^n = \sigma_B = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{4,5 \times 100}{370} \cdot 7,33 = 8,92 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]_n = 11 \text{ kN/cm}^2$$

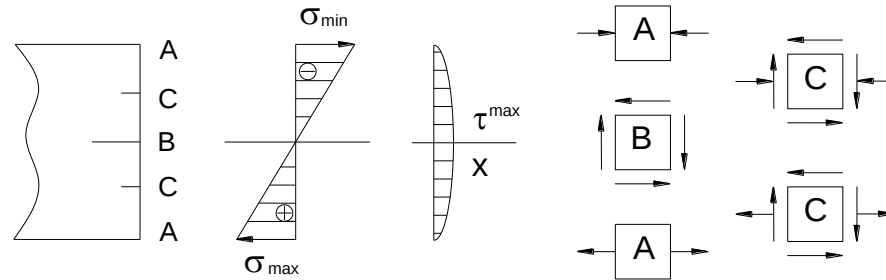


Hình 4-48

So sánh với điều kiện bền (4-54) ta thấy đảm đủ bền theo ứng suất cho phép khi kéo, (bé hơn khoảng 7,1%) và đủ bền theo ứng suất nén cho phép (bé hơn khoảng 19%). Vậy đảm đủ bền.

4.4.5.2. Uốn ngang phẳng.

Đối với dầm chịu uốn ngang phẳng, do trên mặt cắt ngang có cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp nên tìm việc tìm vị trí nguy hiểm và viết điều kiện bền có phức tạp hơn. Dựa vào biểu đồ phân bố ứng suất pháp và tiếp, dọc theo chiều cao ta thấy có ba loại trạng thái ứng suất (hình 4-49).



Hình 4-49

- Ở các điểm ngoài mép, xa trục trung hòa nhất, ví dụ điểm A, trạng thái ứng suất là đơn (ứng suất pháp có giá trị lớn nhất (kéo hay nén), ứng suất tiếp bằng không).

+ Điều kiện bền đối với vật liệu dẻo:

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4-57)$$

+ Điều kiện bền đối với vật liệu giòn:

$$\begin{aligned} \max \sigma_z^k &= \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k \\ \max \sigma_z^n &= \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \end{aligned} \quad (4-58)$$

- Điểm trên trục trung hòa, ví dụ điểm B. Phân tố ở trạng thái trượt thuần túy (ứng suất pháp bằng không, ứng suất tiếp có giá trị lớn nhất). Điều kiện bền là:

$$\max |\tau| \leq [\tau] \quad (4-59)$$

- Những điểm có cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp, ví dụ điểm C. Phân tố này ở trạng thái ứng suất phẳng nên để kiểm tra bền ta không thể làm như ở trạng thái ứng suất đơn. Độ bền của phân tố đang xét tương đương với độ bền của trạng thái ứng suất tương đương. Vậy điều kiện bền được viết là:

$$\max |\sigma_{td}| \leq [\sigma] \quad (4-60)$$

trong đó: σ_{td} là ứng suất tính toán tương đương cho trạng thái ứng suất phẳng đang xét.

Để tìm quan hệ σ_{td} với các ứng suất đang xét ta đưa vào các giả thuyết. Mỗi giả thuyết căn cứ vào một đại lượng cơ học nào đó để suy diễn. Người ta gọi đó là các thuyết bền, ví dụ: Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Ứng suất tính toán tương đương của một điểm C nào đó $\sigma_{z(C)}$ và τ_C có dạng:

$$\sigma_{td(C)} = \sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 4\tau_{(C)}^2}$$

- Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{td(C)} = \sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 3\tau_{(C)}^2}$$

- Theo thuyết bền Mo (Mohr)

$$\sigma_{td(C)} = \frac{1-\alpha}{2} \sigma_{z(C)} + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 4\tau_{(C)}^2}$$

Hai thuyết bền đầu dùng cho vật liệu dẻo, thuyết bền của Mo dùng cho loại vật liệu giòn trong đó $\alpha = [\sigma]_k / [\sigma]_n$.

Thực tế do trị số của ứng suất tiếp trong trường hợp dầm chịu uốn thường rất bé so với trị số ứng suất pháp nên nó thường bỏ qua. Do đó điều kiện bền (4-57), (4-58) gọi là điều kiện bền cơ bản khi uốn.

Khi chọn kích thước của mặt cắt ngang hoặc xác định tải trọng cho phép đối với thanh chịu uốn ngang phẳng ta phải xuất phát từ điều kiện cơ bản (4-57), (4-58). Sau khi đã chọn được kích thước mặt cắt ngang hoặc tải trọng cho phép, nếu cần thiết ta mới kiểm tra điều kiện bền về trượt thuần túy và điều kiện bền khi có cả σ_z và τ . Riêng trường hợp có cả σ_z và τ người ta thường quan tâm ở các mặt cắt chữ I ứng suất pháp và ứng suất tiếp đều khá lớn và người ta cũng chỉ quan tâm khi trên biểu đồ nội lực có các mặt cắt mà tại đó trị số lực cắt và mô men uốn đều lớn.

Ví dụ 4-12: Cho dầm chịu lực như trên hình 4-50. Chọn đường kính của dầm cho hai trường hợp: dầm có mặt cắt ngang không thay đổi, dầm có ba bậc (hình 4-51). Biết $l=80cm$, $P=5000N$, $[\sigma]=16000N/cm^2$. Bỏ qua trọng lượng bản thân.

Giải

- * Dầm có mặt cắt ngang không đổi:

Theo điều kiện bền cơ bản (4-57) và công thức (4-55) ta có:

$$0,1d^3 \geq M_{x \max} / [\sigma]$$

trong đó: M_x

$$M_{x \max} = 5000 \times 80 / 4 = 10^5 Ncm$$

suy ra:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10^5}{0,1 \times 16 \times 10^3}} = 4cm$$

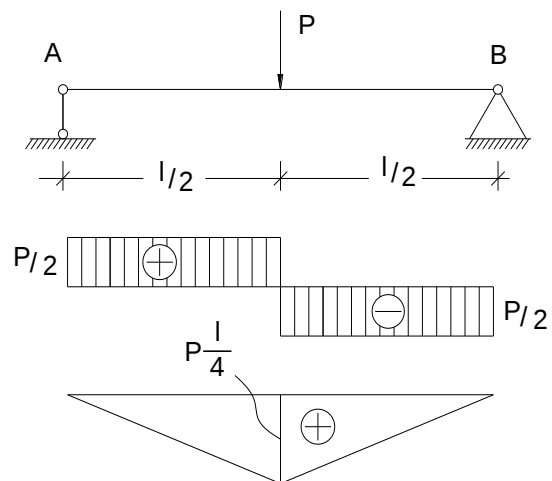
Kiểm tra lại độ bền của dầm theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

Trong trường hợp thanh tròn, ta có:

$$\max|\tau| = \frac{4Q_{y \max}}{3F} \leq [\tau]$$

$$\text{trong đó: } Q_{y \max} = \frac{P}{2} = \frac{5000}{2} = 2500N$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 4^2}{4} = 12,56cm^2$$



Hình 4-50

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ta có:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16000}{2} = 8000 \text{ N/cm}^2$$

$$\text{Vì } \max|\tau| = \frac{4 \times 2500}{3 \times 12,56} = 250 \text{ N/cm}^2$$

nên đảm đủ bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất: $250 \text{ N/cm}^2 < 8000 \text{ N/cm}^2$.

* Dầm ba bậc:

Trị số d_1, d_2 sẽ được xác định từ điều kiện bền của từng đoạn tương ứng.

- Đối với đoạn giữa, tương tự như trên:

$$\max M_x = \frac{Pl}{4} = \frac{5000 \times 80}{4} = 10^5 \text{ Ncm}$$

ta xác định $d_1 = 4 \text{ cm}$.

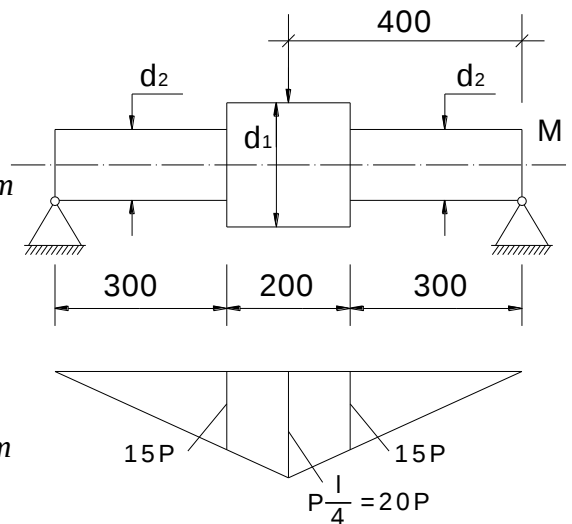
- Đối với đoạn ở hai đầu, mômen uốn lớn nhất trong mỗi đoạn là:

$$M_x = \frac{30P}{2} = \frac{30 \times 5000}{2} = 75000 \text{ Ncm}$$

từ điều kiện bền cơ bản (4-57) ta có:

$$0,1d_2^3 \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{75000}{16000}$$

$$\Rightarrow d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{75000}{0,1 \times 16000}} = 3,6 \text{ cm}$$



Hình 4-51

Với kích thước chọn nếu kiểm tra bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta thấy vẫn thỏa mãn. Ở đây ta không kiểm tra bền theo (4-60), vì mặt cắt ngang là tròn.

4.4.6. Đường đàn hồi.

4.4.6.1. Định nghĩa.

Trục dầm sau khi bị uốn trở thành đường cong được gọi là đường đàn hồi (hình 4-52). Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm. Sau khi biến dạng K có vị trí K' nào đó. Độ dài KK' là chuyển vị của điểm K. Nếu chỉ xét bài toán uốn phẳng, chuyển vị đó có thể phân làm hai thành phần: thành phần theo phương y là v và thành phần theo phương z là w, còn thành phần theo phương x bằng không. Trong trường hợp biến dạng của dầm là bé rõ ràng thành phần w là vô cùng bé bậc cao so với v. Vì vậy ta có thể bỏ qua thành phần w và xem vị trí của điểm K sau khi biến dạng nằm trên đường thẳng vuông góc với trục dầm đi qua K với chuyển vị là v. Chuyển vị v được gọi là độ võng của dầm tại K và nó là hàm số đối với hoành độ z của mặt cắt ngang: $v(z)$.

Như vậy phương trình của đường đàn hồi có thể viết là:

$$y(z)=v(z)$$

Bây giờ nếu từ K' ta vẽ một đường thẳng tiếp tuyến với đường đàn hồi thì góc θ giữa đường tiếp tuyến đó với đường nằm ngang (hình 4-52) bằng góc giữa các vị trí của mặt cắt ngang qua điểm K trước và sau khi dầm bị biến dạng θ được gọi là chuyển vị góc của mặt cắt hay còn gọi là góc xoay.

Ta nhận thấy:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta = y'(z) \quad (4-61)$$

Vậy góc nghiêng của đường đàn hồi với trục dầm khi chưa biến dạng bằng góc xoay của mặt cắt ngang khi dầm bị biến dạng.

Trong kĩ thuật khi tính toán dầm chịu uốn người ta không chế độ võng và góc xoay không vượt quá một giới hạn cho phép. Kiểm tra theo điều kiện đó gọi là tính toán theo điều kiện cứng.

4.4.6.2. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi.

Độ cong của trục dầm sau khi biến dạng được tính theo (4-46):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

Mặt khác, vì đường đàn hồi được biểu diễn bằng hàm số $y(z)$, nên độ cong của đường đàn hồi được tính theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''(z)}{[1 + y'^2(z)]^{3/2}}$$

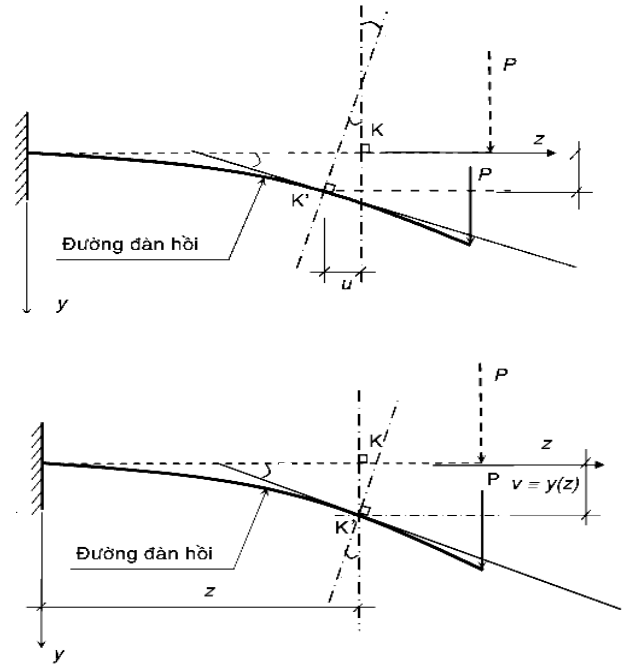
So sánh hai biểu thức trên ta được:

$$\frac{y''(z)}{[1 + y'^2(z)]^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EI_x}$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi. Bây giờ ta phải chọn dấu trong đẳng thức trên. Ta nhận thấy mẫu số của hai vế đều dương. Vậy chỉ cần chọn dấu của $y''(z)$ và M_x ở tử số sao cho phù hợp.

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như hình 4-53. Theo quy ước về hệ trục tọa độ và dấu của mô men uốn, từ hình vẽ ta thấy dấu của y'' và M_x luôn trái dấu nhau, nên phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi sẽ có dạng:

$$\frac{y''(z)}{[1 + y'^2(z)]^{3/2}} = - \frac{M_x}{EI_x} \quad (4-62)$$



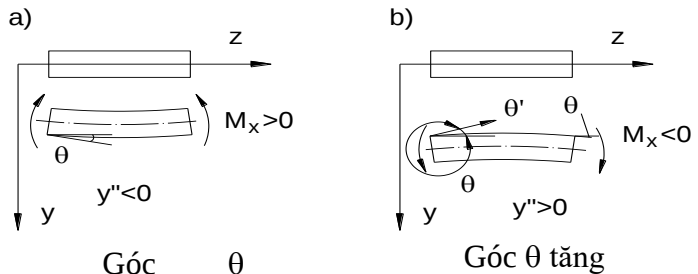
Hình 4-52

Trong kỹ thuật góc xoay cho phép là một đại lượng rất bé so với đơn vị, do đó ta có thể bỏ qua đại lượng y'^2 (bình phương của góc xoay). Từ đó phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$y''(z) = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (4-63)$$

Trong đó tích số EI_x được gọi là độ cứng của dầm khi uốn.

Có nhiều phương pháp xác định đường đàn hồi hoặc độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kỳ của dầm chịu uốn. Mỗi phương pháp có những ưu và nhược điểm, tùy thuộc vào từng loại bài toán cụ thể. Trong phần này ta chỉ trình bày hai phương pháp.



Hình 4-53

4.4.6.3. Thuyết lập phương trình vi phân đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn.

Phương pháp vi phân đường đàn hồi (4-63) là phương trình vi phân theo biến số z . Do đó theo (4-61) phương trình của góc xoay là:

$$\theta = y'(z) = -\int \frac{M_x}{EI_x} dz + C$$

Và phương trình đường đàn hồi là:

$$y(z) = -\int dz \int \frac{M_x}{EI_x} dz + Cz + D$$

Trong đó C và D là hằng số tích phân, được xác định từ các điều kiện liên kết và liên tục của dầm.

Ví dụ 4-13: Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm chịu lực như hình 4-54. Dầm có độ cứng EI_x không đổi.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình 4-54. Biểu thức mô men uốn tại mặt cắt ngang có hoành độ z là:

$$M_x = -Pz \quad (a)$$

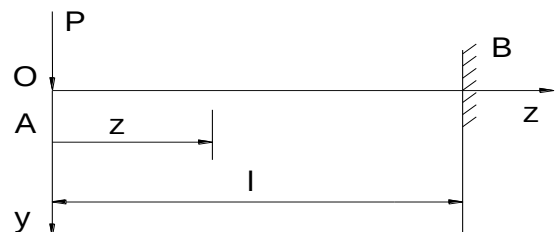
Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$y''(z) = \frac{Pz}{EI_x} \quad (b)$$

Phương trình góc xoay nhận được bằng cách tích phân một lần biểu thức (b):

$$\theta(z) = y'(z) = \frac{Pz^2}{2EI_x} + C \quad (c)$$

tích phân biểu thức (c) ta được phương trình đường đàn hồi:



Hình 4-54

$$y(z) = \frac{Pz^3}{6EI_x} + Cz + D \quad (d)$$

Các hằng số tích phân C, D được xác định từ điều kiện sau:

Tại $z=1$ độ võng và góc xoay đều bằng không, vì liên kết là ngàm, tức:

$$\theta(1)=y'(1)=0, y(1)=0 \quad (e)$$

Khi thay (e) vào (c) và (d) ta nhận được:

$$C = -\frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad D = -\frac{Pl^3}{3EI_x}$$

Cuối cùng phương trình góc xoay và độ võng có dạng:

$$\theta(z) = \frac{Pz^2}{2EI_x} - \frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad y(z) = \frac{Pz^3}{6EI_x} - \frac{Pl^2z}{2EI_x} + \frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

Từ đó ta tính được độ võng và góc xoay tại đầu tự do A ($z=0$):

$$\theta_A = -\frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad y_A = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

Dấu “-” trong biểu thức góc xoay chứng tỏ góc xoay tại mặt cắt A quay ngược chiều kim đồng hồ, còn dấu “+” trong biểu thức độ võng chứng tỏ độ võng hướng xuống dưới. Kết quả đó là cách chọn hệ trục tọa độ.

4.4.6.4. Phương pháp đồ toán (phương pháp tải trọng giả tạo).

Quan hệ vi phân giữa lực cắt Q_y , mô men uốn M_x với tải trọng phân bố có dạng:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q(z)$$

Rõ ràng từ cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ ta có thể tính được lực cắt Q_y bằng cách tích phân một lần và mô men uốn M_x bằng cách lấy tích phân hai lần. Phần trên khi tính lực cắt và mô men uốn tại các mặt cắt bất kỳ ta sử dụng phương pháp mặt cắt mà không dùng phương pháp lấy tích phân.

Theo phương pháp lấy tích phân không định hạn trên, muốn tìm góc xoay ta tích phân một lần, tìm độ võng ta tích phân hai lần phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi (4-63). Ta đặt $y''(z)$ bằng một tải trọng giả tạo mới nào đó. Kí hiệu $q_{gt}=y''(z)=-M_x/EI_x$.

Bằng phương pháp mặt cắt ta xác định được góc quay và độ võng tại một mặt cắt nào đó, tương ứng với lực cắt giả tạo và mô men uốn giả tạo tại mặt cắt đó. Có nghĩa:

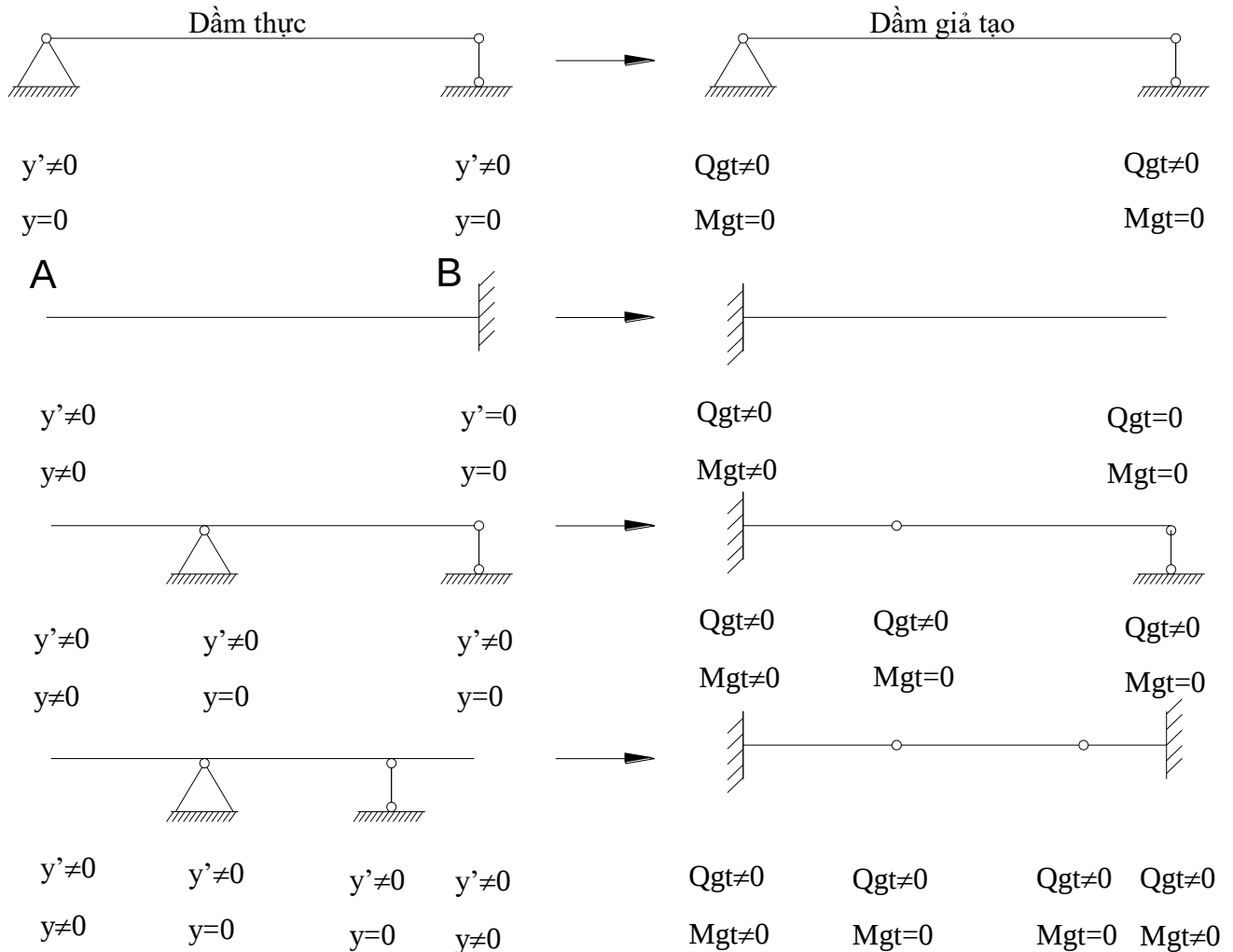
- Góc xoay là $\theta(z)=y'(z)=Q_{gt}$
- Độ võng là $y(z)=M_{gt}$

trong đó Q_{gt} - lực cắt giả tạo, M_{gt} - mô men uốn giả tạo.

Nghĩa là đồ thị góc xoay và đường đàn hồi của dầm thực trùng với biểu đồ lực cắt giả tạo và biểu đồ mô men uốn giả tạo.

Vấn đề còn lại là tải trọng giả tạo phải đặt lên một dầm giả tạo như thế nào để đảm bảo được điều kiện trên.

Đề đồ thị độ võng và góc xoay của dầm thực phải hoàn toàn trùng với biểu đồ mô men uốn giả tạo trong dầm giả tạo thì giữa các điều kiện liên kết của dầm thực và dầm giả

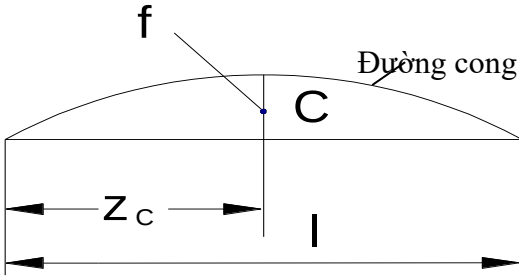
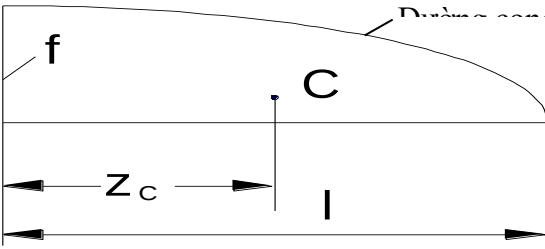
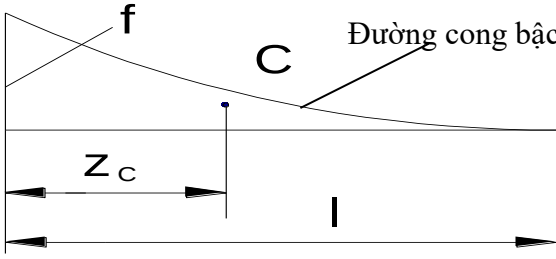
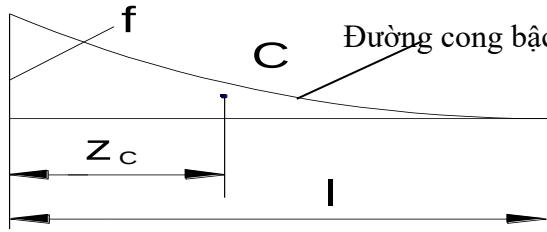


Hình 4-55

tạo phải có sự tương ứng (hình 4-55).

Khi xác định lực cắt giả tại và mô men uốn giả tạo, ta cần biết diện tích và trọng tâm của một số đường cong bậc hai. Bảng 4-2 cho diện tích và trọng tâm của một số biểu đồ.

Bảng 4-2

Hình	Diện tích	Tọa độ trọng tâm zC
	$\frac{2fl}{3}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2fl}{3}$	$\frac{3l}{8}$
	$\frac{fl}{3}$	$\frac{l}{4}$
	$\frac{fl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$

Ví dụ 4-14: Tìm độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm chịu lực như hình 4-56a. Độ cứng của dầm EI_x không đổi.

Giải

Vẽ biểu đồ mômen uốn trên dầm thực hành (hình 4-56b). Chọn dầm giả tạo (hình 4-56c) sau đó đặt lực giả tạo. Vì $q_{gt} = -M_x/EI_x$, nếu M_x âm thì q_{gt} dương, với quy ước của chúng ta, chiều dương của q_{gt} hướng lên trên thì sơ đồ lực giả tạo đặt lên dầm giả tạo như hình 4-56c. Độ võng và góc xoay tại đầu A của dầm thực là trị số mômen uốn giả tạo và lực cắt giả tạo do q_{gt} gây nên trên dầm giả tạo, ta có:

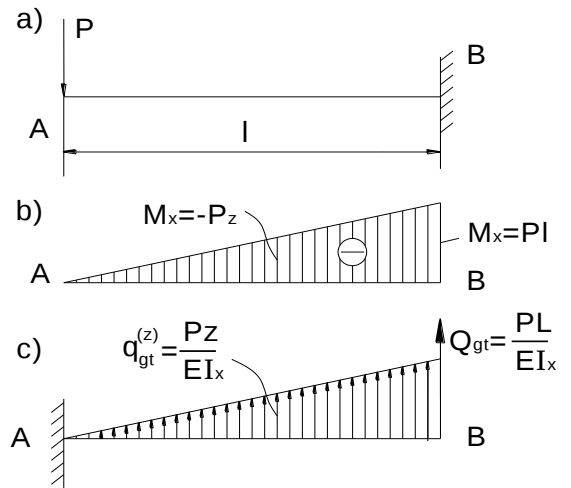
$$Q_{gtA} = y'_A = -\frac{Pl}{EI_x} \frac{l}{2} = -\frac{Pl^2}{2EI_x}$$

$$M_{gtA} = y_A = \frac{Pl^2}{2EI_x} \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

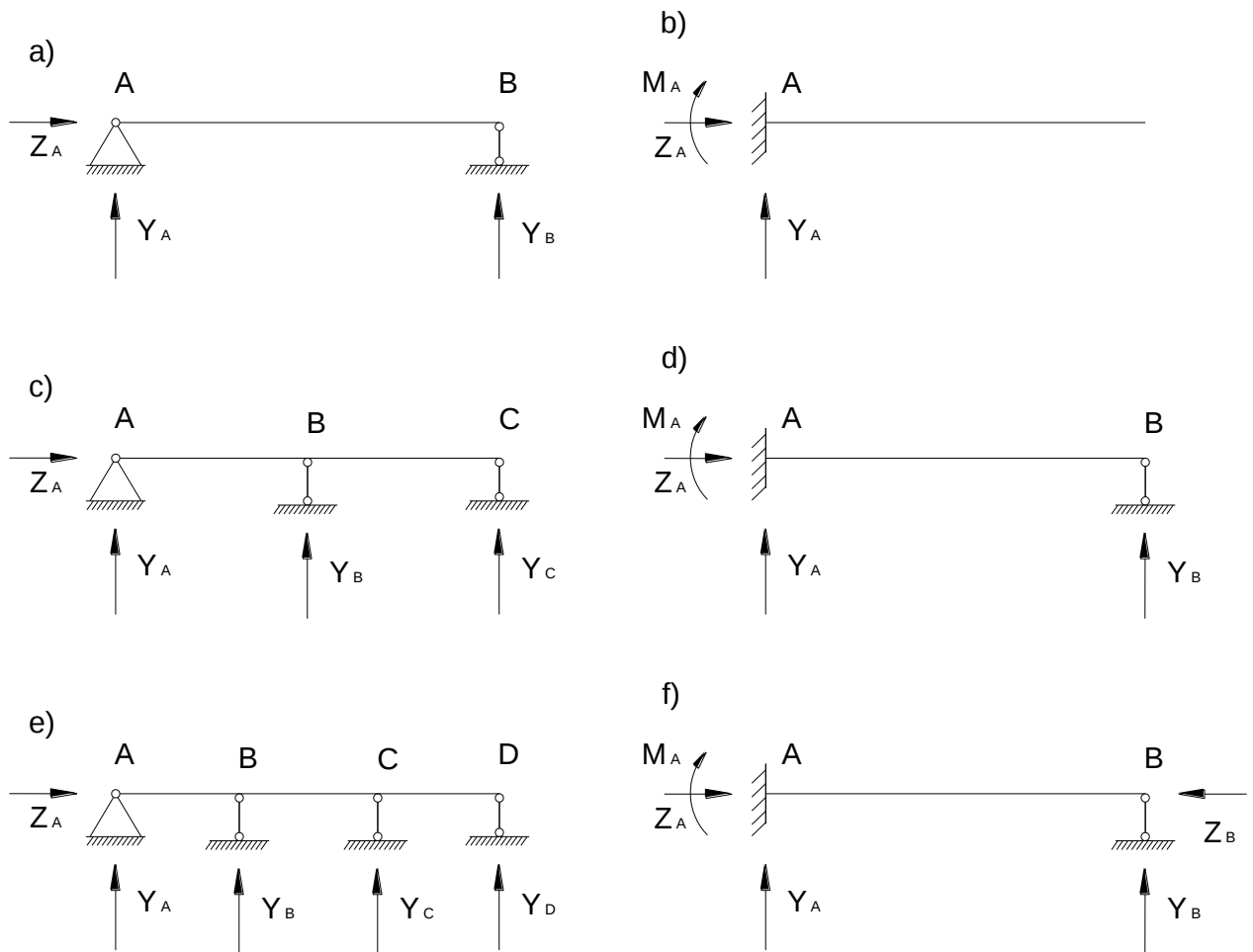
Dấu “-” chứng tỏ góc xoay ngược chiều kim đồng hồ. Dấu “+” chứng tỏ độ võng hướng xuống dưới.

4.4.7. Dầm siêu tĩnh.

Dầm siêu tĩnh là dầm mà các phản lực liên kết đặt lên nó không thể xác định nhờ các



Hình 4-56



phương trình cân bằng tĩnh học.

Hình 4-57

Các dầm có sơ đồ như hình 4-57a,b là các dầm tĩnh định vì đối với mỗi dầm chỉ có ba thành phần phản lực ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$). Các dầm có sơ đồ như trên hình 4-57c,d là các dầm siêu tĩnh vì đối với mỗi dầm có ba phương trình cân bằng tĩnh học chứa bốn thành phần tĩnh học ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Y}_C$). Bậc siêu tĩnh của các dầm này bằng $k=4-3=1$. Các dầm có sơ đồ như hình 4-57e,f có bậc siêu tĩnh bằng hai vì mỗi dầm có năm thành phần phản lực được

chứa trong ba phương trình cân bằng tĩnh học ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Y}_C, \vec{Y}_D$) đối với trường hợp e và ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$) đối với trường hợp f. Bậc siêu tĩnh $k=5-3=2$. Từ các ví dụ nêu trên ta suy ra công thức tổng quát tính bậc siêu tĩnh của một dầm như sau:

$$k=n-3 \quad (4-64)$$

Có nhiều phương pháp giải dầm siêu tĩnh. Trong giáo trình này chỉ trình bày cách giải như đã nêu trong chương kéo - nén, xoắn. Theo phương pháp này ta bỏ bớt các liên kết của dầm siêu tĩnh cho trước để được dầm tĩnh định, không bị biến dạng hình học. Dầm này gọi là dầm cơ bản.

Trên dầm cơ bản ta đặt các tải trọng đã cho và các phản lực chưa biết của các liên kết “thừa” bỏ đi, sau đó tính điều kiện chuyển vị tại các mặt cắt đó gây nên do tải trọng đã cho và phản lực chưa biết (nếu chuyển vị là lực thì ta tính chuyển vị thẳng, nếu phản lực là mô men thì ta tính chuyển vị là góc xoay). Nhờ các điều kiện chuyển vị tại các mặt cắt đã bỏ liên kết thừa đó ta nhận được các phương trình xác định các phản lực chưa biết ở các liên kết thừa. Số phương trình bằng số bậc siêu tĩnh. Bằng cách như vậy ta xác định được tất cả các ngoại lực.

Ví dụ 4-15: Cho một dầm chịu lực như hình 4-58a. Vẽ biểu đồ mômen uốn M_x và lực cắt Q_y , biết độ cứng $EI=\text{const.}$.

Giải

Đây là dầm siêu tĩnh bậc 1. Trước hết ta hãy chọn dầm cơ bản.

* Cách chọn thứ nhất: Chọn dầm cơ bản như hình 4-58b. Ta bỏ liên kết thừa tại B, phản lực liên kết là Y_B .

- Đặt tải trọng đã cho và phản lực chưa biết Y_B lên dầm cơ bản (hình 4-58).

- Phản lực Y_B được tính từ điều kiện: chuyển vị thẳng đứng tại B trên dầm cơ bản bằng không. Ta có:

$$y_B = y_B(\vec{P}) + y_B(\vec{Y}_B) = 0 \quad (a)$$

Tính theo phương pháp đồ toán ta có:

$$Y_B(P) = \frac{5Pa^3}{6EI} \quad (b)$$

$$Y_B(\vec{Y}_B) = -\frac{8Y_B a^3}{3EI} \quad (c)$$

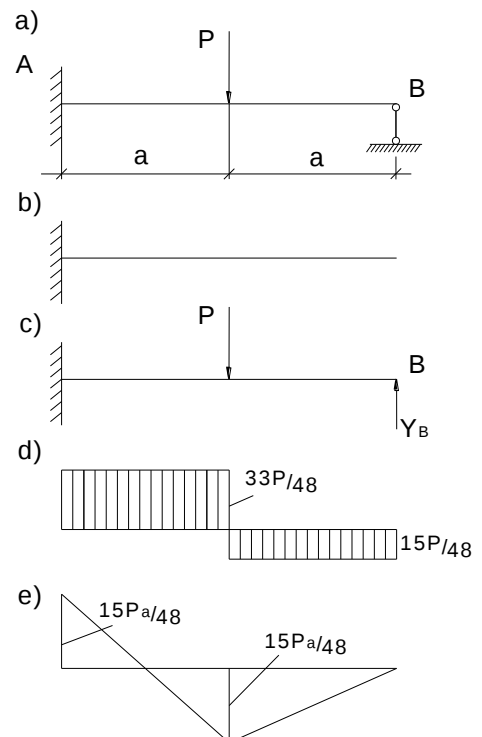
thay (b), (c) vào (a) ta được:

$$\frac{5Pa^3}{6EI} - \frac{8Y_B a^3}{3EI} = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{5}{16} P$$

Biểu đồ lực cắt Q và mômen M được vẽ trên hình 4-58d,e.

* Cách chọn thứ hai: Chọn dầm cơ bản như hình 4-59b. Ta thay ngàm A bằng gối tựa cố định, do đó tại A sẽ có một phản lực M_A chưa biết. Phản lực này được xác định nhờ điều kiện góc xoay tại A do lực tác dụng P và mômen phản lực M_A gây ra bằng không. Điều kiện góc xoay tại ngàm A bằng không, ta có:

$$\theta_A = \theta_A(P) + \theta_A(M_A) = 0 \quad (a)$$



Hình 4-58

Theo phương pháp đồ toán ta có:

$$\theta_A(P) = \frac{Pa^2}{4EI} \quad (b)$$

$$\theta_A(M_A) = \frac{2M_A a}{3EI} \quad (c)$$

thay (b), (c) vào (a) ta được:

$$\frac{Pa^2}{4EI} + \frac{2M_A a}{3EI} = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{3Pa}{8}$$

Dấu “-” chứng tỏ mômen phản lực M_A có chiều ngược lại so với chiều chọn ở trên (hình 4-59b). Biểu đồ lực cắt và mômen uốn được vẽ trên 4-59d,e.

Qua ví dụ ta thấy, ứng với một dầm siêu tĩnh có thể chọn nhiều dầm cơ bản. Dầm cơ bản nào giúp tính toán nhanh chóng, đơn giản nhất được gọi là dầm cơ bản hợp lý.

4.5. THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP.

Khi trên mặt cắt ngang của thanh xuất hiện nhiều thành phần nội lực, ta gọi thanh đó là thanh chịu lực phức tạp. Để thiết lập các công thức về ứng suất, biến dạng ta sẽ áp dụng “nguyên lý cộng tác dụng” đó là: ứng suất, biến dạng do nhiều yếu tố gây ra đồng thời trên một thanh bằng tổng ứng suất hay biến dạng do từng yếu tố một gây ra trên thanh đó.

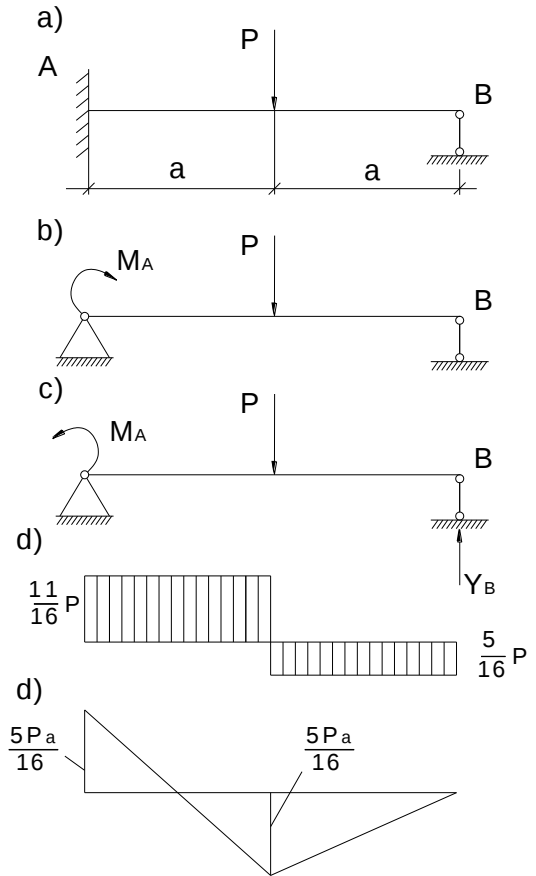
Trong bài toán về chịu lực phức tạp, ảnh hưởng của lực cắt đến độ bền thường là nhỏ ta có thể bỏ qua, nên không đề cập trong phần này. Khi cần kể đến ảnh hưởng của nó ta vẫn sử dụng theo nguyên lý cộng tác dụng.

Trong thực tế ta thường gặp một số bài toán chịu lực tác dụng sau:

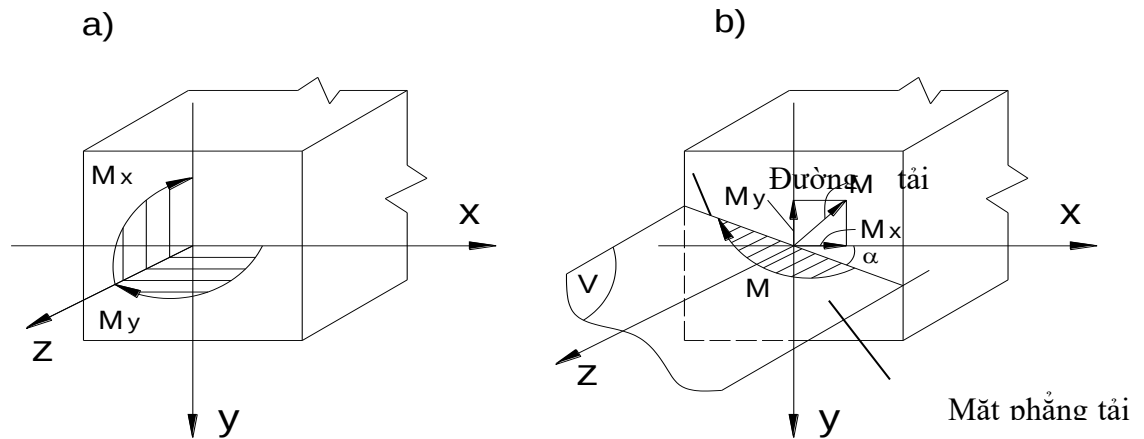
4.5.1. Thanh chịu uốn xiên.

4.5.1.1. Định nghĩa.

Một thanh gọi là chịu uốn xiên khi trên mặt cắt ngang có hai thành phần nội lực là M_x và M_y nằm trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 4-60). Khi chú ý đến lực cắt trên mặt cắt ngang có thể có các thành phần nội lực M_x , Q_y , M_y và Q_x .



Hình 4-59



Hình 4-60

Gọi $\vec{M}$ là véc-tơ tổng của các véc-tơ $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$, ta có:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Mô men uốn M nằm trong mặt phẳng V , chứa trục z , nhưng không trùng với một mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào. Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng cắt ngang gọi là đường tải trọng. Trong uốn xiên đường tải trọng đi qua trọng tâm nhưng không trùng với một trục quán tính chính trung tâm nào (hình 4-60b).

4.5.1.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ x, y được tính theo công thức :

$$\sigma_z = \pm \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (4-65)$$

Trong đó quy ước: M_x được coi là dương khi làm căng phần chiều dương của trục y và M_y được coi là dương khi làm căng phần chiều dương của trục x .

Trong kĩ thuật người ta dùng công thức sau để không cần chú ý đến dấu M_x , M_y , tọa độ x , y .

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| + \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (4-66)$$

Trong đó các giá trị đều lấy trị số tuyệt đối. Còn lấy dấu “+” hoặc dấu “-” trước mỗi số hạng tùy theo các mô men uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

Nếu gọi α là góc của đường tải trọng hợp với trục x (hình 4-60b) thì phương của đường tải trọng được xác định theo công thức:

$$\tan \alpha = \frac{M_x}{M_y}$$

Suy ra $M_x = M \sin \alpha$; $M_y = M \cos \alpha$

Góc α được gọi là dương khi quay từ chiều dương trục x đến chiều dương trục y gặp đường tải trọng.

4.5.1.3. Vị trí trung hòa.

Từ (4-65) phương trình đường trung hòa là:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \quad (4-67)$$

Hay $y = x \cdot \tan \beta$ (4-68)

Trong đó $\tan \beta = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$ hay $\tan \beta = -\frac{1}{\tan \alpha} \frac{I_x}{I_y}$ (4-69)

Vậy đường trung hòa là một đường thẳng đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang và không vuông góc với đường tải trọng như trong uốn phẳng. Từ biểu thức (4-69) ta rút ra một nhận xét là đối với mặt cắt ngang có vô số hệ trục quán tính chính trung tâm như hình tròn, các đa giác đều cạnh, ... thì không xảy ra hiện tượng uốn xiên phẳng. Vì khi đó đường tải trọng sẽ trùng với một trục quán tính chính trung tâm, còn đường trung hòa sẽ trùng với một trục quán tính chính trung tâm thứ hai vuông góc với đường tải trọng, đối với các hình này $I_x = I_y$ nên $\tan \alpha \tan \beta = -1$. Bài toán khi đó chỉ là uốn phẳng.

4.5.1.4. Biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Theo (4-65) mặt ứng suất là mặt phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hòa. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang trong hệ tọa độ như hình 4-61. Trục tung là đường trung hòa, trục hoành vuông góc với đường trung hòa.

4.5.1.5. Điều kiện bền.

Từ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang ta thấy điểm nguy hiểm là các điểm xa đường trung hòa nhất về phía kéo hoặc phía nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Vậy điều kiện bền có dạng:

- Đối với vật liệu dẻo:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \quad (4-70)$$

- Đối với vật liệu giòn:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]_k \quad (4-71)$$

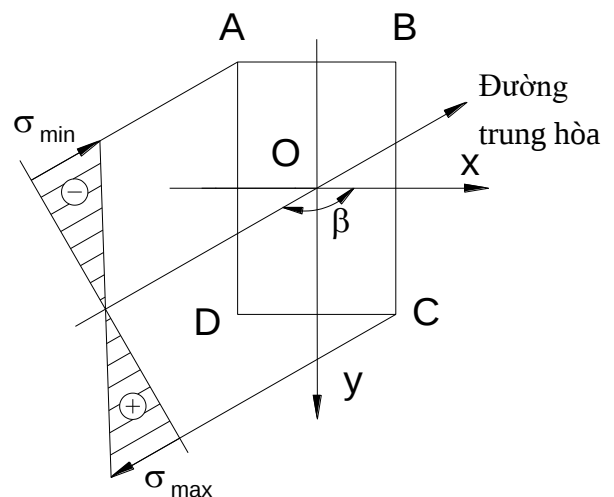
$$|\sigma|_{\min} \leq [\sigma]_n \quad (4-72)$$

trong đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} |y_k| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_k| \quad (4-73)$$

$$\sigma_{\min} = - \left[\frac{|M_x|}{I_x} |y_n| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_n| \right] \quad (4-74)$$

x_k, y_k là tọa độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hòa nhất; x_n, y_n là tọa độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hòa nhất.



Hình 4-61

Nếu mặt cắt ngang của thanh là những mặt cắt có thể nội tiếp trong hình chữ nhật có dạng như trên hình 4-62 thì:

$$|x_k| = |x_n| = x_{\max}, \text{ khi đó: } |y_k| = |y_n| = y_{\max}$$

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (4-75)$$

Trong đó:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|}; W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|} \quad (4-76)$$

Trường hợp này điều kiện sẽ là:

- Đối với vật liệu dẻo:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (4-77)$$

- Đối với vật liệu giòn:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k \quad (4-78)$$

Từ điều kiện bền trên ta suy ra bài toán cơ bản sau:

- Kiểm tra bền theo (4-71) hoặc (4-72) hoặc (4-73).
- Tìm tải trọng cho phép. Gọi $[P_i]$ là tải trọng suy rộng cho phép (tải trọng tập trung, tải trọng phân bố, mô men tập trung hay mô men phân bố), thì tại mặt cắt nguy hiểm ta có:

$$M_x = k_1[P_i]; M_y = k_2[P_i]$$

k_1, k_2 là các hằng số. Từ điều kiện bền, ví dụ theo (4-77), đầu tiên ta có thể tính theo công thức:

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} \quad (4-79)$$

trong đó: $C = \frac{W_x}{W_y} \quad (4-80)$

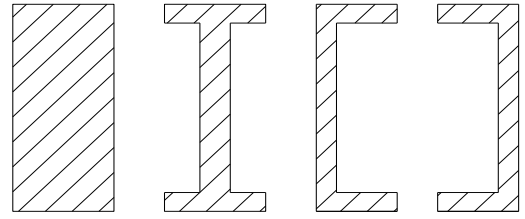
Đối với hình chữ nhật có chiều cao h và bề rộng b thì $C=b/h$.

Đối với mặt cắt hình chữ I lúc đầu có thể lấy $C=8$, và hình chữ U lấy $C=6$; sau đó kiểm tra tính toán lại.

Ví dụ 4-16: Cho dầm chịu lực như hình 4-64. Xác định số hiệu mặt cắt dầm thép chữ I, vị trí đường trung hòa. Cho $P=2400N$; $q=4000N/m$; $l=2m$; $\alpha=30^\circ$; $[\sigma]=16000N/cm^2$.

Giai

Mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có:



Hình 4-62

$$M_x = \frac{ql^2}{2} + Pl \cos \alpha = \frac{4000 \times 4}{2} + 2400 \times 2 \times 0,886 = 12160 \text{ Nm}$$

$$M_y = Pl \sin \alpha = 2400 \cdot 2 \cdot 0,5 = 2400 \text{ Nm}$$

Thử lần thứ nhất ta thấy $C=8$.

Theo công thức (4-79):

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} = \frac{12160 + 8 \times 2400}{16000} 100 = 1$$

Ta chọn mặt cắt I số 20 có các trị số nhỏ hơn và gần nhất $W_x=184\text{cm}^3$; $W_y=23,1\text{cm}^3$.

Thử lại:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1216000}{184} + \frac{240000}{23,1} = 17000 \text{ N}$$

Vì

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{17000 - 16000}{16000} 100 = 6,2\% > 5\%$$

do đó ta lấy mặt cắt số 20a có:

$$W_x=203\text{cm}^3, W_y=28,2\text{cm}^3$$

Khi đó

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1216000}{203} + \frac{240000}{28,2} = 14500 \text{ N/cm}^2$$

ứng suất nhỏ hơn:

Vì giữa thép có số hiệu 20 và 20a không còn số hiệu nào khác nên ta chọn dầm thép có số hiệu 20a.

Xác định vị trí trung hòa. Tra bảng với I (20a) ta có $I_x=2030\text{cm}^4$; $I_y=155\text{cm}^4$. Do đó tại mặt cắt ngang, phương của đường trung hòa là:

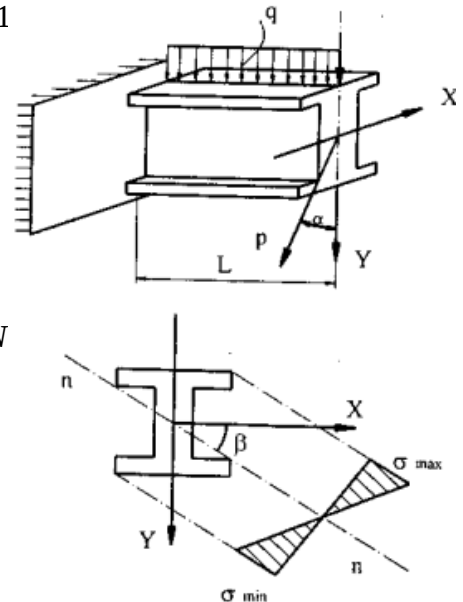
$$\tan \beta = \frac{I_x M_{y \max}}{I_y M_{x \max}} = \frac{2030 \times 2400}{155 \times 12160} = +2,58 \text{ hay } \beta = +68^\circ 50'.$$

4.5.1.6. Độ võng và góc xoay.

Độ võng và góc xoay tổng hợp của mặt cắt nào đó bằng tổng hình học độ võng và góc xoay do các thành phần mômen uốn tác dụng trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm, ta có:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (4-81)$$

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} \quad (4-82)$$



Hình 4-63

Trong đó: f_x, f_y là độ võng theo phương trục x do M_y gây nên và theo phương trục y do M_x gây nên, θ_x và θ_y là góc xoay của mặt cắt xoay quanh trục x do M_y gây nên và xoay quanh trục y do M_x gây nên.

Phương của độ võng tổng hợp f so với trục tại một mặt cắt là:

$$\tan \beta = \frac{f_y}{f_x} \quad (4-83)$$

4.5.2. Uốn và kéo - nén đồng thời.

4.5.2.1. Định nghĩa.

Một thanh gọi là chịu uốn và kéo - nén đồng thời khi trên mặt cắt ngang của thanh có các thành phần nội lực là lực dọc N_z , mô men uốn M_x, M_y . Nếu kể đến lực cắt do uốn thì trên mặt cắt có N_z, Q_y, M_x, M_y, Q_z (hình 4-64).

4.5.2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt ngang được xác định theo công thức:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (4-84)$$

$$\text{Hoặc} \quad \sigma_z = \frac{N_z}{F} \left(1 + \frac{M_x}{N_z i_x^2} y + \frac{M_y}{N_z i_y^2} x \right) \quad (4-85)$$

Trong đó: F - diện tích mặt cắt ngang; i_x, i_y - bán kính quán tính chính $i_x = \sqrt{I_x / F}$; $i_y = \sqrt{I_y / F}$; I_x, I_y - mô men quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, x và y - tọa độ của điểm tính ứng suất.

Dấu của N_z theo quy ước như trong uốn xiên.

Công thức kỹ thuật có dạng:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (4-86)$$

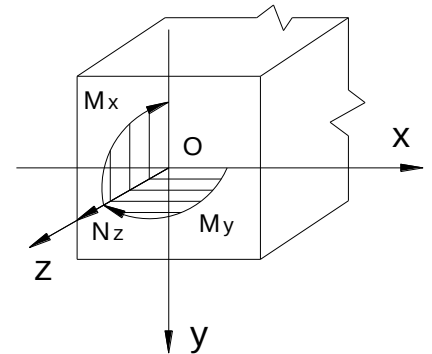
Trong đó các giá trị đều lấy giá trị tuyệt đối. Còn lấy dấu “+” hoặc “-” trước mỗi số hạng tùy theo lực dọc là kéo hay nén và các mô men uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

4.5.2.3. Vị trí đường trung hòa.

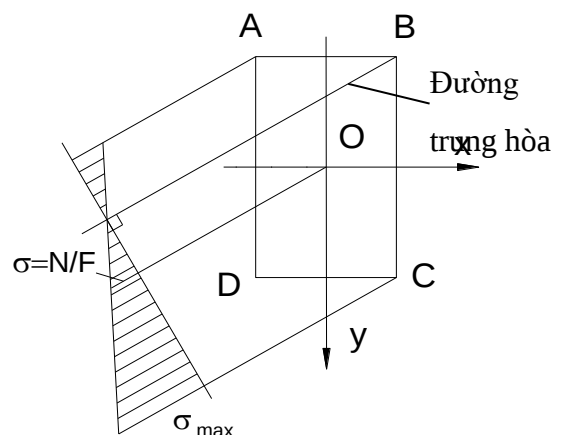
Từ (4-84) ta suy ra phương trình đường trung hòa là:

$$\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \quad (4-87)$$

4.5.2.4. Biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.



Hình 4-64



Hình 4-65

Tương tự như trong uốn xiên do mặt cắt ứng suất là phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hòa. Biểu đồ phân bố ứng suất được vẽ như trên hình 4-65.

4.5.2.5. Điều kiện bền.

Từ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, ta thấy điểm nguy hiểm là các điểm ở chu vi, xa đường trung hòa nhất về phía kéo hoặc phía nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Vậy điều kiện bền là:

- Đối với vật liệu dẻo:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \quad (4-88)$$

- Đối với vật liệu giòn:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]_k$$

$$|\sigma|_{\min} \leq [\sigma]_n \quad (4-89)$$

trong đó:
$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{I_x} |y| + \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (4-90)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{I_x} |y| - \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (4-91)$$

x_k, y_k là tọa độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hòa nhất.

x_n, y_n là tọa độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hòa nhất.

Nếu mặt cắt ngang của thanh có dạng như trên hình 4-62 thì lý luận tương tự như trong uốn xiên ta có:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{I_x} + \frac{|M_y|}{I_y} \quad (4-92)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{I_x} - \frac{|M_y|}{I_y} \quad (4-93)$$

4.5.3. Kéo - nén lệch tâm.

4.5.3.1. Định nghĩa.

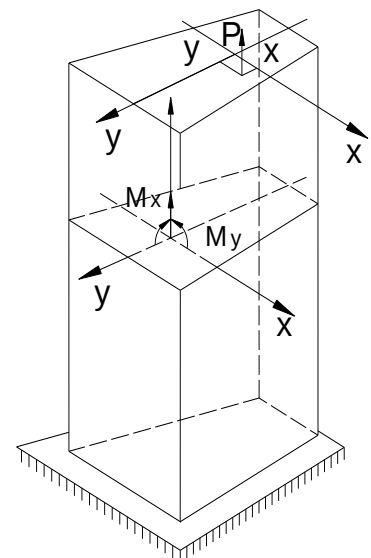
Kéo - nén lệch tâm là trường hợp ngoại lực có phương song song với trục thanh, nhưng điểm đặt ở ngoài trọng tâm mặt cắt ngang (hình 4-66).

Trong trường hợp tổng quát khi tải trọng đặt lệch tâm, thanh hình lăng trụ sẽ chịu lực kéo hoặc nén và uốn xiên thuần túy. Nội lực trên mặt cắt ngang thu gọn thành lực dọc có trị số:

$$N_z = P$$

Mô men uốn $M_x = P y_p; M_y = P x_p \quad (4-94)$

Trong đó: x_p, y_p là tọa độ điểm đặt lực P trong hệ trục quán tính chính trung tâm.



Hình 4-66

Về phương diện tính toán ứng suất, ta thấy bài toán kéo - nén lệch tâm chỉ là một trường hợp của uốn và kéo - nén đồng thời. Do đó các kết quả nhận được từ trường hợp uốn và - nén đồng thời đều được áp dụng ở đây (hình 4-66).

4.5.3.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang có giá trị:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (4-95)$$

Thay giá trị M_x, M_y theo (4-94) ta được:

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2} \right) \quad (4-96)$$

4.5.3.3. Phương trình đường trung hòa.

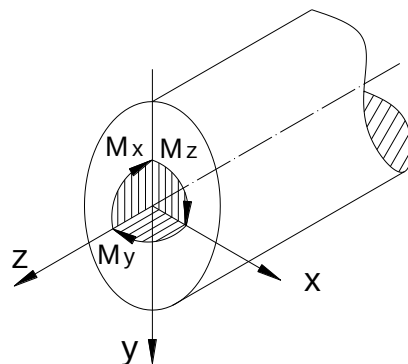
$$1 + \frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2} = 0 \quad (4-97)$$

Từ tính chất đường trung hòa có thể nằm ngoài mặt cắt ngang, ta luôn tìm được một diện tích có chứa trọng tâm, sao cho lực đặt trong diện tích đó thì mặt cắt ngang chỉ chịu lực kéo hoặc chỉ chịu nén. Diện tích đó được gọi là lõi của mặt cắt (lõi tiết diện).

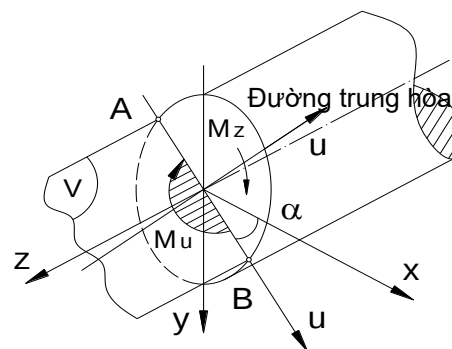
4.5.4. Xoắn và uốn đồng thời.

4.5.4.1. Định nghĩa.

Một thanh gọi là xoắn và uốn đồng thời. Khi trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần nội lực là mô men xoắn và mô men uốn (khi kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q do uốn thì có thêm thành phần lực cắt) (hình 4-67).



Hình 4-67



Hình 4-68

4.5.4.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang tròn.

Trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần ứng suất:

Ứng suất pháp do mô men gây nên trường hợp uốn phẳng hoặc uốn xiên, và ứng suất tiếp do mô men xoắn gây nên phân bố như trường hợp xoắn thuần túy (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q).

4.5.4.3. Điều kiện bền.

Điểm nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm là giao điểm của đường tải trọng với chu vi: điểm A hoặc B (hình 4-68). Tại đó ứng suất pháp và tiếp có giá trị:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u} \quad (4-98)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (4-99)$$

Vì phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng nên điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{td\max} \leq [\sigma] \quad (4-100)$$

Trong đó ứng suất tương đương được tính theo một thuyết bền thích hợp. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có:

$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ thay các giá trị của σ và τ theo (4-98), (4-99) và chú ý $W_p = 2W_u$, ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{td}}{W_u}$$

$$\text{Với } M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (4-101)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{td}}{W_u}$$

$$\text{Với } M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} \quad (4-102)$$

Theo thuyết bền Mo ta có:

$$\sigma_{td} = \frac{1-\alpha}{2} \sigma + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\text{Hay } \sigma_{\max} = \left(\frac{1-\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \right) \frac{1}{W_u} = \frac{M_{td}}{W_u}$$

$$\text{Với } M_{td} = \frac{1-\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (4-103)$$

$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Tóm lại điều kiện bền được viết gọn dưới dạng:

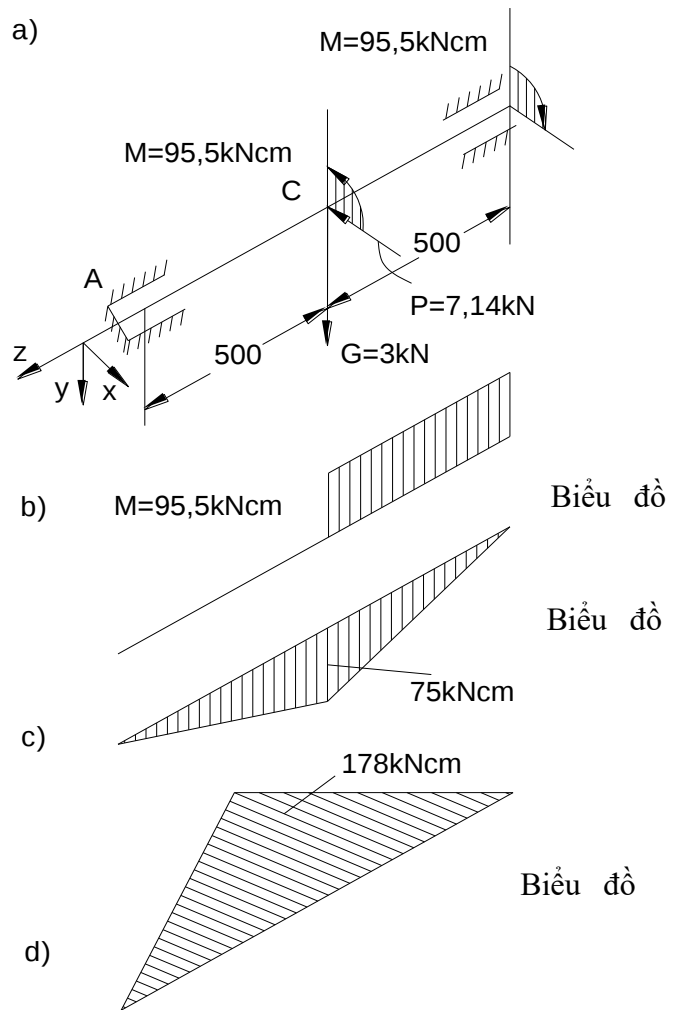
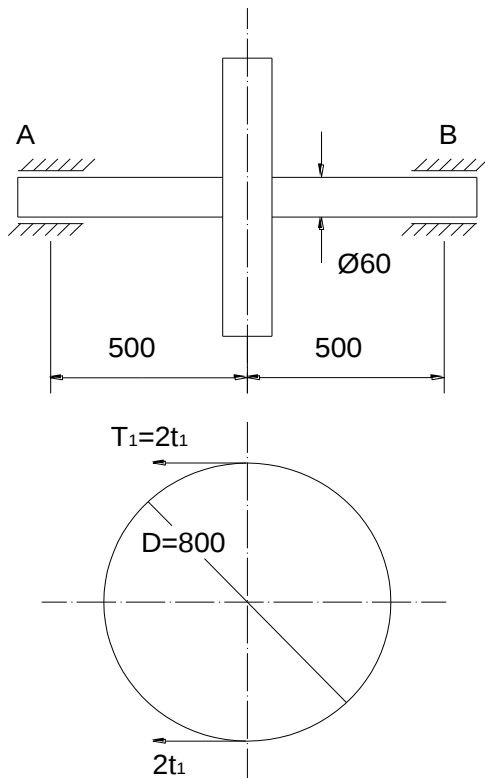
$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (4-104)$$

trong đó $W_u = 0,1d^3$

M_{td} được tính theo các thuyết bền thích hợp (4-102), (4-103), (4-104).

Ví dụ 4-17: Một trục truyền bằng thép chịu lực như trên hình 4-69. Trọng lượng puli $G=3\text{kN}$, công suất và số vòng quay của moto là $N=50\text{kW}$, $n=500$ vòng/phút. Kiểm tra bền trục theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng đàn biết $[\sigma]=12\text{kN/cm}^2$.

Giải



Hình 4-69

Sơ đồ chịu lực của trục biểu diễn trên hình 4-69, trong đó:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 52,4 \text{ rad / s}$$

$$M = \frac{N}{\omega} = \frac{5.10^3}{52,4} = 0,955.10^3 \text{ Nm} = 95,5 \text{ kNcm}$$

Lực căng dây đai được xác định theo điều kiện cân bằng của mômen xoắn:

$$M = \frac{T_1 D}{2} - \frac{t_1 D}{2} = \frac{t_1 D}{2}$$

$$\text{Rút ra } t_1 = \frac{2M}{D} = \frac{2 \times 95,5}{80} = 2,38 \text{ kN} ; T_1 = 2t_1 = 2 \times 2,38 = 4,76 \text{ kN}$$

$$P = T_1 + t_1 = 4,76 + 2,38 = 7,14 \text{ kN}$$

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng sẽ bằng:

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{0,1 \times d^3}$$

Mặt cắt nguy hiểm tại C về phía CB, tại đó:

$$M_x = \frac{Gl}{4} = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ kNcm}; \quad M_y = \frac{Pl}{4} = \frac{7,14 \times 100}{4} = 178 \text{ kNcm}$$

$$M_z = 95,5 \text{ kNcm}$$

Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên các hình 4-69b, c, d.

Thay số vào ta được:

$$\sigma_{td} = \frac{\sqrt{75^2 + 178^2 + 0,75 \times 95,5^2}}{0,1 \times 6^3} = 9,72 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy trục thỏa mãn điều kiện bền.

4.5.5. Thanh chịu lực tổng quát.

Một thanh gọi là chịu lực tổng quát khi trên mặt cắt ngang của nó có đầy đủ 6 thành phần nội lực. Theo nguyên lý cộng tác dụng, ứng suất pháp trên mặt cắt ngang do các thành phần nội lực là lực dọc N_z , mô men uốn M_x, M_y còn ứng suất tiếp do các thành phần nội lực là mô men xoắn M_z , lực cắt Q_x, Q_y . Việc kiểm tra điều kiện bền thanh chịu lực tổng quát được tiến hành theo trình tự sau:

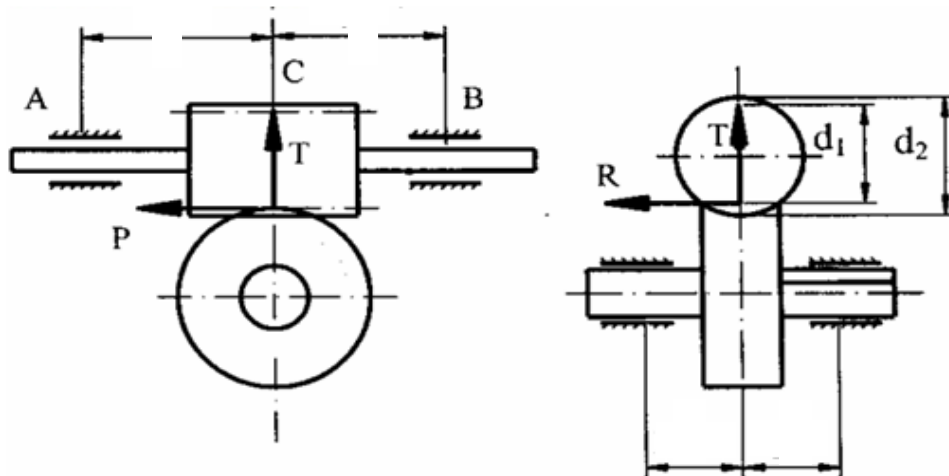
- Chọn điểm nguy hiểm hoặc nghi ngờ nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm hay các mặt cắt nghi ngờ nguy hiểm. Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất tương đương lớn nhất được tính theo thuyết bền nào đó.
- Viết điều kiện bền.

Ví dụ 4-18: Kiểm tra bền trong hộp giảm tốc (4-70) biết. Biết $P=5,26 \text{ kN}$; $T=1,7 \text{ kN}$; $R=1,58 \text{ kN}$; $d_1=4,62 \text{ cm}$; $d_2=6,30 \text{ cm}$; $l=24 \text{ cm}$.

Vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]=16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải

Tìm sơ đồ chịu lực của thanh bằng cách đưa các lực tác dụng về trọng tâm mặt cắt, sơ đồ chịu lực của trục vít được trình bày trên hình 4-71a.



Hình 4-70

Vẽ các biểu đồ nội lực để xác định được mặt cắt nguy hiểm hoặc nghi ngờ nguy hiểm. Biểu đồ nội lực được vẽ trên các hình 4-71b, c, d, e (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q_x, Q_y). Dựa vào biểu đồ nội lực ta thấy ngay mặt cắt ngang thuộc phần AC là mặt cắt ngang nguy hiểm. Trên mặt cắt ngang này các nội lực có giá trị:

$$|N_z| = P = 5,26 \text{ kN}; |M_x| = 18,50 \text{ kNcm}; |M_y| = 9,48 \text{ kNcm}.$$

Xác định điểm nguy hiểm, phân tích trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm.

Ta biết dưới tác dụng của mômen xoắn, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất ở các điểm ngoài chu vi.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{4,98}{0,2 \cdot (4,62)^3} = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất pháp do lực dọc N_z , mômen uốn M_x có trị số:

$$\sigma_{\max} = -\frac{|N_z|}{F} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} = -\frac{5,26}{3,14(4,62)^2} + \frac{\sqrt{(18,50)^2 + (9,48)^2}}{0,1 \cdot (4,62)^3}$$

$$= -0,31 + 2,10 = 1,79 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{|N_z|}{F} - \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} = -\frac{5,26}{3,14(4,62)^2} - \frac{\sqrt{(18,50)^2 + (9,48)^2}}{0,1 \cdot (4,62)^3}$$

$$= -0,31 - 2,10 = -2,41 \text{ kN/cm}^2$$

Đó là hai giao điểm của đường tải trọng do M_x, M_y gây nên với chu vi.

Vì vật liệu là dẻo nên ta chọn điểm nguy hiểm là điểm có:

$$|\sigma|_{\max} = 2,41 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

Tính toán theo yêu cầu. Để kiểm tra bền trục vít ta dựa vào một thuyết bền nào đó. Ví dụ, theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$= \sqrt{(-2,41)^2 + 4(0,25)^2}$$

$$= 2,461 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

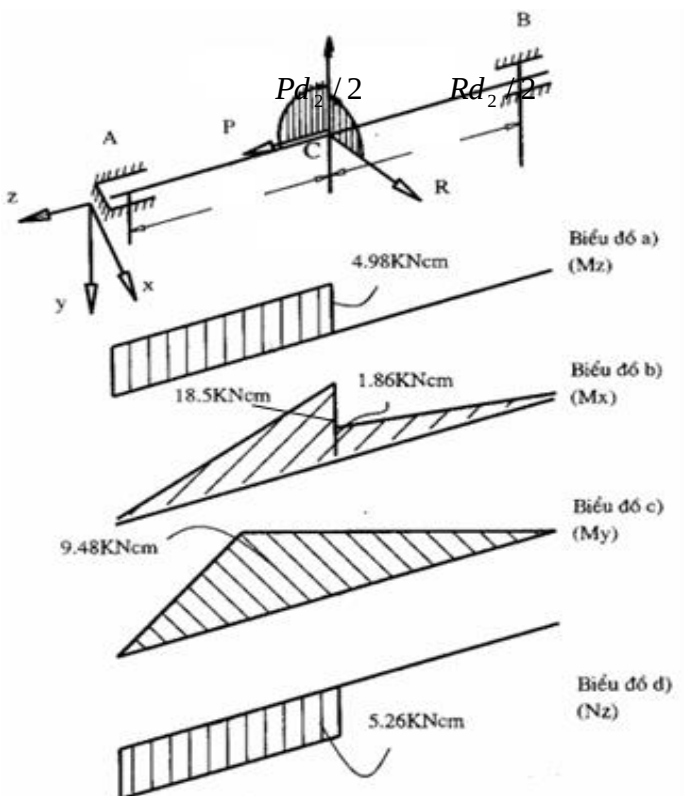
Hoặc theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$= \sqrt{(-2,41)^2 + 3(0,25)^2}$$

$$= 2,44 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy trục đủ bền.



Hình 4-71

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nêu các khái niệm về nội lực, ứng suất, ứng suất pháp, ứng suất tiếp? Biến dạng dài tuyệt đối, biến dạng dài tỷ đối, biến dạng góc?
2. Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang? Cách xác định các thành phần nội lực?
3. Trình bày quan hệ giữa các thành phần nội lực theo ứng suất?
4. Thế nào gọi là thanh chịu kéo –nén đúng tâm?
5. Ứng suất cho phép là gì? Cách xác định giá trị ứng suất cho phép đối với vật liệu dẻo, giòn?
6. Thiết lập công thức tính độ giãn dài tuyệt đối của thanh chịu kéo –nén. Nêu cách xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu?
7. Thế nào gọi là thanh chịu xoắn thuần túy? Trình bày cách kiểm tra theo điều kiện bền, điều kiện cứng cho thanh tròn chịu xoắn thuần túy?
8. Thế nào gọi là uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng?

Chương 5 CHỈ TIÊU BỀN

Đưa ra một số phương pháp tính bền trong trường hợp tải trọng động và tải trọng tĩnh.

5.1. CHỈ TIÊU BỀN TRONG TRƯỜNG HỢP TẢI TRỌNG TĨNH.

Tải trọng tĩnh: là tải trọng có phương, chiều, trị số không thay đổi hoặc thay đổi không đáng kể theo thời gian.

Phá hỏng tĩnh là do ứng suất làm việc vượt quá giới hạn bền tĩnh của vật liệu và thương là do tải đột ngột gây nên.

$$\text{Điều kiện bền: } \sigma \leq [\sigma] \text{ hoặc } \tau \leq [\tau] \quad (5-1)$$

$$\text{Với } [\sigma] = \sigma_{gh}/n \text{ hoặc } [\tau] = \tau_{gh}/n \quad (5-2)$$

Trong đó σ_{gh} , τ_{gh} - giới hạn bền (đối với vật liệu dẻo) hoặc giới hạn chảy (đối với vật liệu giòn).

5.2. CHỈ TIÊU BỀN TRONG TRƯỜNG HỢP TẢI TRỌNG ĐỘNG.

Tải trọng động: là tải trọng có hoặc phương chiều hoặc trị số thay đổi theo thời gian.

Khi chi tiết máy làm việc với ứng suất thay đổi đạt tới số chu kỳ đủ lớn, nó có thể bị phá hỏng một cách đột ngột, ngay cả khi ứng suất sinh ra trong nó còn nhỏ hơn rất nhiều so với giới hạn bền tĩnh của vật liệu. Hiện tượng này thường bắt đầu từ những vết nứt rất nhỏ (vết nứt tế vi) sinh ra tại vùng chịu ứng suất lớn, theo thời gian các vết nứt này phát triển theo cả bề rộng và bề sâu, làm cho chi tiết bị hỏng đột ngột.

Đồ thị đường cong mỏi: Qua nghiên cứu cho thấy giữa ứng suất phá hỏng chi tiết với số chu kỳ lặp lại tương ứng của ứng suất có quan hệ xác định: số chu kỳ càng nhiều thì ứng suất phá hỏng chi tiết càng bé và ngược lại. Bằng nhiều thí nghiệm và thống kê toán học, người ta đã thiết lập được đồ thị biểu diễn quan hệ giữa ứng suất (biên độ ứng suất hoặc ứng suất lớn nhất) và số chu kỳ ứng suất tương ứng mà mẫu thử có thể chịu được cho tới khi bị phá huỷ (hình 5-1). Đây là đồ thị đường cong mỏi (hay còn gọi là đường cong Vêle).

Đồ thị gồm 2 phần:

- Phần đường cong có phương trình: $\sigma^m \cdot N = \text{const}$ (5-3)

Trong đó: σ - ứng suất phá hỏng (giới hạn mỏi ngắn hạn) của chi tiết

m - bậc của đường cong mỏi;

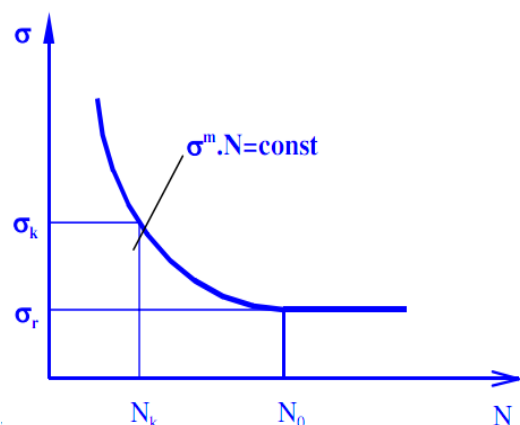
N - số chu kỳ ứng suất ứng với s .

- Phần đường thẳng: Khi σ giảm đến trị số σ_r thì có thể tăng N khá lớn mà mẫu thử không bị hỏng vì mỏi. Điều này tương ứng với phần đường thẳng song song với trục hoành đi qua điểm (σ_r, N_0) và được biểu diễn bằng phương trình:

$$\sigma_r = \text{const} \quad (5-4)$$

Trong đó: σ_r - là giới hạn mỏi dài hạn

N_0 - là số chu kỳ cơ sở của vật liệu (các loại thép thông thường có $N_0 = 10^6 - 10^8$).



Hình 5-1 Đồ thị đường cong

Cách tính độ bền khi chi tiết máy chịu ứng suất thay đổi ổn định.

Tính toán theo điều kiện bền (5-2).

Nếu chi tiết làm việc ở chế độ dài hạn, tức khi số chu kỳ chịu tải N lớn hơn hoặc bằng số chu kỳ cơ sở N_0 , ứng suất giới hạn lấy theo giới hạn mỏi dài hạn: $\sigma_{gh} = \sigma_r$

Nếu chi tiết làm việc ở chế độ ngắn hạn, tức $N < N_0$ thì từ công thức (5-3) ta có:

$$\sigma_{rN}^m \cdot N = \sigma_{rN_0}^m \cdot N_0$$

do đó giới hạn mỏi ngắn hạn ứng với số chu kỳ chịu tải N sẽ là:

$$\sigma_{rN} = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}}$$

Và ta có $\sigma_{gh} = \sigma_{rN} = \sigma_r \cdot K_L$

Trong đó: $K_L = \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}}$ - hệ số tuổi thọ, kể đến ảnh hưởng của thời hạn phục vụ và chế độ tải trọng đến giới hạn mỏi.

Cách tính độ bền khi chi tiết máy chịu ứng suất thay đổi không ổn định.

Giả sử chi tiết chịu các ứng suất thay đổi $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ ứng với các chu kỳ ứng suất tương ứng $N_1', N_2' \dots$

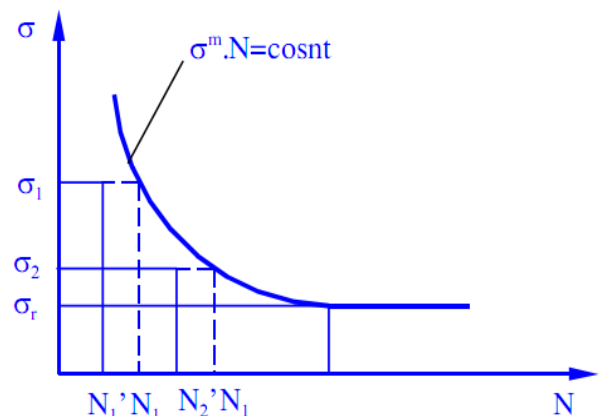
Khi chịu ứng suất σ_1 với chu kỳ N_1 thì chi tiết bị phá hỏng vì mỏi, nhưng cũng với ứng suất đó, mà chỉ chịu số chu kỳ $N_1' < N_1$ thì nó chưa bị phá hỏng vì mỏi, tuy vậy, bên trong nó đã chịu một tổn thất mỏi, ứng với tỷ suất mỏi $N_1' / N_1 < 1$, (nếu $N_1' / N_1 = 1$ thì chi tiết bị phá hỏng vì mỏi).

Tương tự, khi chịu σ_2 thì trong chi tiết có tổn thất mỏi ứng với $N_2' / N_2 < 1 \dots$

Một cách tổng quát, khi chi tiết chịu các ứng suất thay đổi $[\sigma_i]$ với các số chu kỳ tương ứng $[N_i']$ ($i=1, 2, \dots, n$):

- Tổn thất mỏi ứng với chế độ ứng suất thứ i sẽ là N_i' / N_i

- Theo điều kiện cộng bậc nhất đơn giản các tổn thất mỏi, ta có điều kiện để chi tiết bị phá hỏng vì mỏi sẽ là: $\sum \frac{N_i'}{N_i} = 1$ (a)



Hình 5-2 Sơ đồ tính độ bền khi ứng suất thay đổi bất ổn định

Nhân cả tử số và mẫu số của biểu thức (a) với σ_1^m ta có: $\sum \frac{\sigma_1^m N_i'}{\sigma_1^m N_i} = 1$, nhưng vì $\sigma_1^m N_i = \sigma_r^m N_0$, nên $\sum \sigma_1^m N_i' = \sigma_r^m N_0$ (b)

Từ biểu thức (b) có thể có hai cách tính độ bền khi ứng suất thay đổi bất ổn định:

+ **Cách thứ nhất:** Có thể thay tác dụng của các ứng suất $[\sigma_i]$ trong suốt thời gian phục vụ của chúng bằng tác dụng của ứng suất lớn nhất với chu kỳ tương đương N_E .

Vì $\sigma_{\max}^m N_E = \sigma^m N_E$ nên từ (b) có thể rút ra: $\sum \sigma_i^m N_i' = \sigma_{\max}^m N_E$, do đó số chu kỳ tương đương là:

$$N_E = \sum \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^m N_i' \quad (5-3)$$

và tính toán được đưa về chế độ ứng suất thay đổi ổn định, có ứng suất $\sigma_{\max}$ với số chu kỳ N_E xác định theo (5-3). Nếu $N_E \geq N_0$ thì $\sigma_{gh} = \sigma_r$, nếu $N_E < N_0$ thì $\sigma_{gh} = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_E}}$.

Cách tính này thường dùng trong tính toán các bộ truyền cơ khí.

+ **Cách thứ hai:** Có thể thay tác dụng của các ứng suất $[\sigma_i]$ trong suốt thời gian phục vụ của chúng bằng tác dụng của ứng suất tương đương nào đó (σ_{td}) ứng với số chu kỳ tương đương định trước $N_\Sigma = \sum N_i$

Vì $\sigma_{td}^m N_E = \sigma_r^m N_0$, nên từ (b) có thể rút ra: $\sum \sigma_i^m N_i' = \sigma_{td}^m N_\Sigma$

Do đó:

$$\sigma_{td} = \sqrt[m]{\sum \frac{\sigma_i^m N_i'}{N_\Sigma}} \quad (5-4)$$

và tính toán được đưa về chế độ ứng suất thay đổi ổn định, có ứng suất σ_{td} xác định theo (5-4) với số chu kỳ $N_\Sigma = \sum N_i$. Nếu $N_\Sigma = N_0$ thì $\sigma_{gh} = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_\Sigma}}$

Cách tính này thường dùng để tính chọn ổ lăn.

5.3. ĐỘ CỨNG BỀ MẶT.

Độ cứng của chi tiết là khả năng chống lại biến dạng đàn hồi hoặc thay đổi hình dáng của nó khi chịu tải.

Cần phân biệt độ cứng thể tích và độ cứng bề mặt.

- Độ cứng thể tích liên quan đến biến dạng của toàn bộ khối vật liệu chi tiết.
- Độ cứng tiếp xúc liên quan đến biến dạng của lớp bề mặt của chi tiết.

Độ cứng là một trong những chỉ tiêu quan trọng về khả năng làm việc của chi tiết.

Trong nhiều trường hợp, chất lượng làm việc của máy được quyết định bởi độ cứng của chi tiết. Ví dụ trục chính của máy cắt kim loại không đủ độ cứng sẽ làm tăng sai số của các sản phẩm gia công. Các trục trong hộp giảm tốc không đủ độ cứng sẽ bị biến dạng quá mức cho phép, gây tập trung tải trọng trên các bánh răng, gây mòn, thậm chí làm kẹt ổ...

Cũng có khi kích thước chi tiết được xác định theo độ bền thì khá nhỏ, song vẫn phải lấy tăng lên nhiều để thỏa mãn yêu cầu về độ cứng, chẳng hạn như thân máy cắt kim loại.

Yêu cầu về độ cứng ược quyết định bởi:

- Điều kiện bền của chi tiết, ví dụ như tiết máy quay cần cân bằng, tiết máy chịu nén dọc trục...
- Điều kiện tiếp xúc đều giữa các chi tiết: các bánh răng ăn khớp với nhau, ổ gối trục với ổ trượt vv...
- Điều kiện công nghệ, có ý nghĩa lớn trong sản xuất hàng loạt: đường kính trục cần định theo khả năng gia công vv...

- Yêu cầu đảm bảo chất lượng làm việc của máy: ví dụ độ cứng của các chi tiết trong máy công cụ có ảnh hưởng rất lớn đến độ chính xác gia công.

- Phương pháp tính toán độ cứng

Tính toán độ cứng thể tích

Trong trường hợp cần phải đảm bảo chi tiết có đủ độ cứng thể tích cần thiết, tính toán về độ cứng nhằm giới hạn biến dạng đàn hồi của chi tiết trong một phạm vi cho phép. Các phương trình tính toán cơ bản là:

- Khi chịu kéo (nén): $\Delta l \leq [\Delta l]$ (5-5)

- Khi chịu xoắn: $\varphi \leq [\varphi]$ (5-6)

- Khi chịu uốn: $f \leq [f]; \theta \leq [\theta]$ (5-7)

Cách xác định trị số của chuyển vị khi kéo (nén) Δl , độ võng f và góc xoay θ khi uốn, góc xoắn φ khi chịu xoắn được xác định theo các công thức của “Sức bền vật liệu”.

- Tính toán độ cứng tiếp xúc

Biến dạng tiếp xúc của các vật thể nhẵn, đồng nhất, tiếp xúc ban đầu theo điểm hoặc đường được tính theo lý thuyết Héc và Bêliaép.

Biến dạng tiếp xúc của các vật thể có diện tích tiếp xúc lớn (ví dụ bàn trượt với ống máy tiện vv...) được xác định bằng thí nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. GS.TSKH. Đỗ Sanh – PGS.TS. Nguyễn Văn Vượng, Cơ học ứng dụng, NXB Giáo dục (tái bản lần thứ tư).
2. GS.TS. Đỗ Sanh (chủ biên)- PGS.TS. Nguyễn Văn Vượng- TS. Phan Hữu Phúc, Giáo trình Cơ kỹ thuật, Nhà xuất bản giáo dục (tái bản lần thứ nhất).
3. GS. Nguyễn Đức Cán, Bài giảng Sức bền vật liệu, trường Đại học Mở- bán công TP. HCM, Bộ giáo dục và đào tạo, 1995.
4. Nguyễn Trọng Hiệp, Chi tiết máy tập, Nhà xuất bản giáo dục, 1995.